Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА



„ВРЕМЯ“

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА

С 57 РИСУНКАМИ

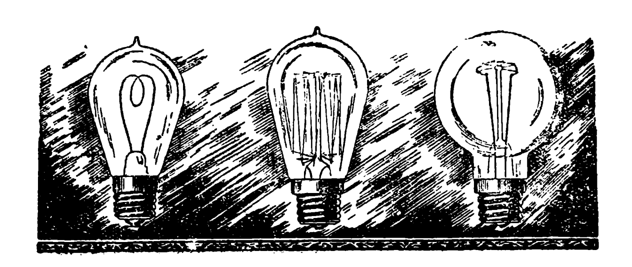


КООПЕРАТИВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО „ВРЕМЯ"
ЛЕНИНГРАД

Н.В.В. 2017 Киев

РИСУНОК НА КРЫШКЕ,
ФОРЗАЦ И РИСУНКИ
В ТЕКСТЕ РАБОТЫ
Ю. Д. СКАЛДИНА

1933



ГЛАВА ПЕРВАЯ

ПЯТОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ

ПЯТОЕ ДЕЙСТВИЕ

Алгебру называют нередко „арифметикой семи действий", желая подчеркнуть, что к четырем общеизвестным математическим операциям она присоединяет три новых: возвышение в степень и два ему обратных действия. Это гораздо характернее для алгебры, чем употребление буквенных обозначений. В истории математики мы знаем сочинения, даже целый ряд их, не содержащие вовсе буквенных обозначений и все же представляющие собой несомненно учебники алгебры; к таким „риторическим" алгебрам принадлежит, например, знаменитый учебник Леонарда Пизанского, появившийся в начале XIII века и употреблявшийся затем еще в течение трех столетий.

Наши алгебраические беседы мы начнем с „пятого действия"—с возвышения в степень.

Вызвана ли потребность в этом новом действии практической жизнью? Безусловно. Мы сталкиваемся с ним в реальной действительности очень часто. Вспомним о

многочисленных случаях вычисления площадей и объемов, где неизбежно приходится возвышать числа во вторую и третью степень. Далее: сила всемирного тяготения взаимодействия электростатическое и магнитное, свет, звук—ослабевают со второю степенью расстояния. Продолжительность обращения планет вокруг солнца и спутников вокруг планет связана с расстояниями от центра обращения также степенной зависимостью: вторые степени времен обращения относятся между собою, как третьи степени расстояний.

Не надо думать, что практика сталкивает нас только с вторыми и третьими степенями, более же высокие показатели существуют только в упражнениях алгебраических задачников. Инженер, производя расчеты на прочность, сплошь и рядом имеет дело с четвертыми степенями, а при других вычислениях (например, диаметра паропровода)—даже с шестою степенью. Исследуя силу, с какою текучая вода увлекает камни, гидротехник наталкивается на зависимость также от шестой степени: если скорость течения в одной реке вчетверо больше, чем в другой, то быстрая река способна перекатывать по своему ложу камни в 4^6, т. е. в 4 096 раз более тяжелые, чем медленная. [1]

С еще более высокими степенями встречаемся мы, изучая зависимость яркости раскаленного тела — например, нити накала в электрической лампочке—от температуры. Общая яркость растет при белом калении с двенадцатой степенью температуры, а при красном—с тридцатой степенью температуры („абсолютной“, т. е. считаемой от минус 273°). Это значит, что тело, нагретое, наприм., от 2000° до 4000° (абсолютных), т. е. в 2 раза сильнее, становится ярче в 2^{12}, иначе говоря, более чем в 4000

[1] Подробнее об этом в „Занимательной механике“ Перельмана.

ров. О том, какое значение имеет эта своеобразная зависимость в технике изготовления электрических лампочек, мы еще будем говорить в другом месте, — так же, как и о применении „пятого действия“ в процессах живой природы.

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Никто, пожалуй, не пользуется так широко пятым математическим действием, как астрономы. Исследователям вселенной на каждом шагу приходится встречаться с огромными числами, состоящими из одной—двух значащих цифр и длинного ряда нулей. Изображение обычным образом подобных числовых исполинов, справедливо называемых „астрономическими числами“, неизбежно вело бы к большим неудобствам, особенно когда приходится производить с ними вычисления. Расстояние, например, до туманности Андромеды, написанное обычным порядком, представляется таким числом километров:

8 500 000 000 000 000 000.

При выполнении астрономических расчетов приходится, к тому же, выражать зачастую небесные расстояния не в километрах или более крупных единицах, а в сантиметрах. Наше число, так раздробленное, удлиняется 5 нулями:

850 000 000 000 000 000 000 000.

Массы звезд выражаются еще большими числам особенно если их раздроблять, как требуется для многих расчетов, в граммы. Масса нашего солнца в граммах равна:

1 900 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

Легко представить себе, как затруднительно было бы производить вычисления с такими громоздкими числами

и как легко было бы при этом ошибиться. А ведь здесь приведены далеко еще не самые большие астрономические числа!

Пятое математическое действие дает вычислителям простой выход из этого затруднения. Единица, сопровождаемая рядом нулей, представляет собою определенную степень десяти:

$$100 = 10^2; \ 1000 = 10^3, \text{ и т. д.}$$

Приведенные раньше числовые великаны могут быть поэтому представлены в таком виде:

первый	$85 \cdot 10^{22}$
второй	$19 \cdot 10^{32}$

Делается это не только для сбережения места, но и для облегчения расчетов. Если бы потребовалось, например, оба эти числа перемножить, то достаточно было бы найти произведение $85 \times 19 = 1615$ и поставить его впереди множителя $10^{22+32} = 10^{54}$:

$$85 \cdot 10^{22} \times 19 \cdot 10^{32} = 1615 \cdot 10^{54}.$$

Это, конечно, гораздо удобнее, чем выписывать сначала число с 22 нулями, затем с 32-мя и, наконец, с 54-мя, — не только удобнее, но и надежнее, так как при писании десятков нулей можно проглядеть один-два нуля и получить неверный результат.

СКОЛЬКО ВЕСИТ ВЕСЬ ВОЗДУХ?

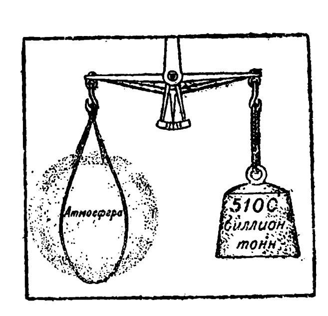
Чтобы убедиться, насколько облегчаются практические вычисления при пользовании степенным изображением больших чисел, выполним такой расчет: определим, какую долю массы земного шара составляет масса всего окружающего его воздуха.

На каждый кв. сантиметр земной поверхности воздух давит, мы знаем, с силою около килограмма. Это озна-

чает, что вес того столба атмосферы, который опирается на 1 кв. см, равен 1 кг. Атмосферная оболочка Земли вся составлена из таких воздушных столбов; их столько, сколько кв. см содержит поверхность нашей планеты; и столько же килограммов весит вся атмосфера. Заглянув в справочник, узнаем, что поверхность земного шара равна 510 миллионам кв. километров. В степенном изображении

$$510\,000\,000 = 51 \cdot 10^7 \text{ кв. км.}$$

Сколько кв. сантиметров в кв. километре? Рассчитаем. Линейный километр содержит 1000 м, по 100 см каждый, т. е. $100\,000 = 10^5$ см, а кв. км — $(10^5)^2 = 10^{10}$ кв. см. Во всей поверхности земного шара заключается поэтому кв. сантиметров



$$51 \cdot 10^7 \times 10^{10} = 51 \cdot 10^{17}.$$

Столько же килограммов весит и атмосфера Земли. Переведя в тонны, получим

$$51 \cdot 10^{17} : 1000 = 51 \cdot 10^{17} : 10^3 = 51 \cdot 10^{17-3} = 51 \cdot 10^{14}.$$

Масса же земного шара выражается числом

$$57 \cdot 10^{20} \text{ тонн.}$$

Чтобы определить, во сколько раз наша планета тяжелее ее воздушной оболочки, производим деление:

$$57 \cdot 10^{20} : 51 \cdot 10^{14} = \text{около } 10^6,$$

т. е. масса атмосферы составляет примерно миллионную долю массы земного шара.

Едва ли бы вы избежали ошибки в числе нулей, если бы проделали весь этот расчет с числами в обычном изображении, не говоря уже о том, что затратили бы на него и больше времени.

ГОРЕНИЕ БЕЗ ПЛАМЕНИ И ЖАРА

Если вы спросите у химика, почему дрова или уголь горят только при высокой температуре, он скажет вам, что соединение углерода с кислородом происходит, строго говоря, при всякой температуре, но при низких температурах процесс этот протекает чрезвычайно медленно (т. е. в реакцию вступает весьма незначительное число молекул) и потому ускользает от нашего наблюдения. Закон, определяющий скорость химических реакций, гласит, что с понижением температуры на 10° скорость реакции (число участвующих в ней молекул) уменьшается в два раза. „Были измерены реакции, где заметная инверсия сахара (т. е. превращение его в смесь декстрозы и левулозы) наступала только через сутки, если жидкость была при 100°. Если поддерживать температуру при 0°, то скорость реакции будет в 2^{10} раз меньше. Значит при 0° заметная реакция может быть наблюдаема только спустя $2^{10} = 1024$ суток, т. е. на третий год после начала опыта", — пишет Оствальд („Эволюция химии").

Применим сказанное к реакции соединения углерода с кислородом, т. е. к процессу горения дров. Пусть при температуре пламени 600° сгорает ежесекундно 1 грамм древесины. Во сколько времени сгорит 1 грамм дерева при 20°? Мы уже знаем, что при температуре на

$580 = 58.10$ ниже, скорость реакции меньше в

$$2^{58} \text{ раз,}$$

т. е. 1 грамм дерева сгорит в 2^{58} секунд.

Скольким годам равен такой промежуток времени? Мы можем приблизительно подсчитать это, не производя 57 умножений двойки на себя и обходясь без логарифмических таблиц. Воспользуемся тем, что

$$2^{10} = 1024 = \text{около } 10^3.$$

Следовательно

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} : 2^2 = \frac{1}{4}\ 2^{60} = \frac{1}{4}\ (2^{10})^6 =$$

$$= \text{около } \frac{1}{4}\ 10^{18},$$

т. е. около четверти триллиона секунд. В году около 30 миллионов, т. е. 3.10^7 секунд; поэтому

$$\frac{1}{4} \cdot 10^{18}\quad 3.10^7 = \frac{1}{12}\ 10^{11} = \text{около } 10^{10}.$$

Сто миллиардов лет! Вот во сколько, примерно, времени сгорел бы грамм дерева без пламени и жара.

Итак, дерево и уголь горят и при обычной температуре, не будучи вовсе подожжены. Изобретение огня ускорило этот страшно медленный процесс почти в триллион раз.

РАЗНООБРАЗИЕ ПОГОДЫ

Будем характеризовать погоду только по одному признаку, — покрыто ли небо облаками, или нет, т. е. станем различать лишь дни ясные и пасмурные. Как вы думаете, много ли при таком условии возможно шестидневок с различным чередованием погоды?

Казалось бы, не много: пройдет месяца два, и все комбинации ясных и пасмурных дней в шестидневке бу-

дут исчерпаны; тогда неизбежно повторится одна из тех комбинаций, которые уже наблюдались прежде.

Попробуем, однако, точно подсчитать, сколько различных комбинаций возможно при таких условиях. Это — одна из задач, неожиданно приводящих к пятому математическому действию.

Итак: сколькими различными способами могут на одной шестидневке чередоваться ясные и пасмурные дни?

Решение

Первый день шестидневки может быть либо ясный, либо пасмурный; имеем, значит, пока две „комбинации".

В течение двухдневного периода возможны следующие чередования ясных и пасмурных дней:

ясный и ясный
ясный и пасмурный
пасмурный и ясный
пасмурный и пасмурный.

Итого в течение 2 дней 2^2 различных рода чередований. В 3-дневный промежуток к каждой из 4 комбинаций первых 2 дней присоединяются две комбинации третьего дня; всех родов чередований будет

$$2^2 \times 2 = 2^3.$$

В течение 4-дневки число чередований достигнет

$$2^3 \times 2 = 2^4.$$

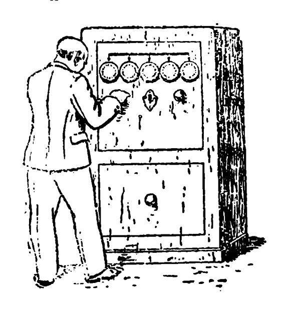
В 5-дневку 2^5 и, наконец, в шестидневку $2^6 = 64$ различных рода чередований.

Отсюда следует, что шестидневок с различным порядком следования ясных и пасмурных дней имеется 64. Спустя $64 \times 6 = 384$ дня необходимо должно повториться одно из прежде бывших сочетаний; повторение, конечно, может случиться и раньше, но 384 дня — срок,

по истечении которого такое повторение неизбежно. И обратно: может пройти целый год, даже больше (1 год и 19 дней), в течение которого ни одна шестидневка не будет по погоде похожа на другую.

ЗАМОК С СЕКРЕТОМ

В заводской конторе обнаружен был несгораемый шкаф, сохранившийся с дореволюционных лет. Отыскался и ключ к нему, но, чтобы им воспользоваться, нужно было знать секрет замка; дверь шкафа открывалась лишь тогда, когда имевшиеся на двери 5 кружков с алфавитом на их ободах (26 букв) устанавливались на определенное слово. Так как никто этого слова не знал, то, чтобы не взламывать шкафа, решено было перепробовать все сочетания букв на кружках. На составление одного сочетания требовалось 3 секунды времени.



Можно ли надеяться, что шкаф будет открыт в течение ближайших 10 рабочих дней?

Решение

Подсчитаем, сколько всех буквенных сочетаний надо было перепробовать.

Каждая из 26 букв первого кружка может сопоставляться с каждой из 26 букв второго кружка. Значит, двубуквенных сочетаний было

$$26 \times 26 = 26^2$$

К каждому из этих сочетаний можно присоединить каждую из 26 букв третьего кружка. Поэтому трехбуквенных сочетаний было

$$26^2 \times 26 = 26^3.$$

Таким же образом определяем, что четырехбуквенных сочетаний было 26^4, а пятибуквенных 26^5 или 11 881 376. Чтобы составить эти почти 12 миллионов сочетаний, потребовалось бы времени, считая по 3 секунды на каждое, —

$$3 \times 11\,881\,376 = 35\,644\,128 \text{ сек.}$$

Это составляет около 10 000 часов или 1 400 семичасовых рабочих дней — без малого четыре года.

Значит, шансов на то, что шкаф будет открыт в течение ближайших 10 рабочих дней, 10 на 1 400, или один на 140. Это очень малая вероятность.

ДВОЙНИКИ

Подобным же расчетом можно уяснить себе, почему так редко попадаются люди со сходною наружностью, не находящиеся между собой в родстве.

Желая придать конкретность расчету, будем опираться, хотя и на произвольные, но правдоподобные числовые данные. А именно, предположим, что разнообразие наружности зависит от изменчивости 25 признаков (рост, сложение, толщина, волосы, фасон головы, лоб, брови, глаза, нос, уши, щеки, губы, подбородок, шея и т. п.), из которых

10 допускают по 3 варианта каждый,
10 „ „ 4 „ „
5 „ „ 5 „ „

Нетрудно определить тогда число всех различных комбинаций признаков. Оно равно

$$3^{10} \times 4^{10} \times 5^5$$

Преобразуем это выражение:

$$3^{10} \times 4^{10} \times 5^5 = 3^{10} \times 2^{20} \times 5^5 = 3^{10} \times 2^{15} \times 2^5 \times 5^5 =$$
$$= 3^{10} \times 2^{15} \times 10^5 = 59\,049 \times 32\,768 \times 10^5 = \text{около } 19.10^{13}.$$

Людей же на всем земном шаре около 1 900 миллионов, т. е. 19.10^8. Число возможных изменений наружности больше числа людей в 10^{13-8}, т. е. в 100 000 раз.

Понятно теперь, почему двойники встречаются лишь в виде исключений. Людей на Земле недостаточно для того, чтобы двойники могли попадаться чаще.

НЕОБЫЧАЙНОЕ ЛЕКАРСТВО

То направление в медицине, которое носит название гомеопатии, признает обычные дозы лекарств вредными и назначает их только в чрезвычайно сильном разведении. Гомеопатические лекарства приготовляются так. Одну часть лекарственного настоя разбавляют в 99 равных частях чистого спирта. Сотую часть полученного раствора вновь смешивают с 99 частями спирта. То же делают с сотой долей нового разведения и т. д., повторяя эту операцию от 18 до 30 раз. Для лечения, например, коклюша настой росянки (Drosera) разбавляют в спирту 30-ю сейчас описанными приемами.

Надо думать, что, назначая подобные дозы лекарств, гомеопаты никогда не пытались математически осознать то, что они делают. Потому что, если подойти к гомеопатическим разведениям с надлежащим расчетом, то обнаружится совершенно неожиданная вещь. Займемся таким вычислением; оно как раз и относится к настоящему разделу нашей книги.

Пусть количество первоначального лекарственного настоя равнялось 100 куб. см. В гомеопатической аптеке берут 1 сантиметровый кубик настоя и смешивают с 99 кубиками чистого спирта. Получают 100 кубиков раствора,

в котором содержится 1 кубик лекарства. Иначе говоря, лекарство разбавлено в 100 раз.

Далее берут 1 куб. см этого разбавленного лекарства и смешивают с 99 куб. см чистого спирта, — т. е. разбавляют снова в 100 раз. Но в новом растворе на 100 куб. см жидкости приходится уже только 0,01 куб. см первоначального настоя. Следовательно, здесь степень разбавления $0{,}01 \times 0{,}01 = 0{,}0001$, или $\frac{1}{10^4}$.

После третьей подобной же операции первоначальный раствор разбавляется в 100^3, т. е. в 10^6; после четвертой — в 10^8 раз и т. д.

Наконец, после 30-й операции (столько их предписано для лекарства против коклюша) первоначальный настой окажется разбавленным в 10^{60} раз. Это значит, что 1 куб. см настоя словно влит в 10^{60} куб. см спирта.

Пока мы видим лишь „астрономическое число", но не подозреваем, что оно означает. Дело предстанет перед нами в новом свете, если мы сопоставим это число с числом молекул в одном куб. сантиметре первоначального лекарства. Физика утверждает (имея на то вполне достаточные основания), что число молекул в куб. см настоя никак не больше 10^{22}. Иными словами, в объеме 10^{60} куб. см разбавленной жидкости содержится „только" 10^{22} молекул лекарственного вещества, — по одной молекуле на каждые

$$10^{60} : 10^{22} = 10^{38} \text{ куб. см.}$$

Что же это за объем 10^{38} куб. см, содержащий одну молекулу лекарства? Сделаем расчет. В куб. километре 10^{15} куб. см. Значит, 10^{38} куб. см заключают в себе куб. километров

$$10^{38} : 10^{15} = 10^{23}$$

Заглядываем в астрономический справочник и ищем подходящие объемы. Находим, что объем земного шара, 10^{12} куб. километров, — микроскопическая величина по сравнению с сейчас полученной. Даже солнце, имеющее объем 14.10^{17} куб. км, недостаточно велико для наглядного сравнения: оно в 70 000 раз меньше того объема раствора, который содержит в себе одну единственную молекулу лекарственного вещества.

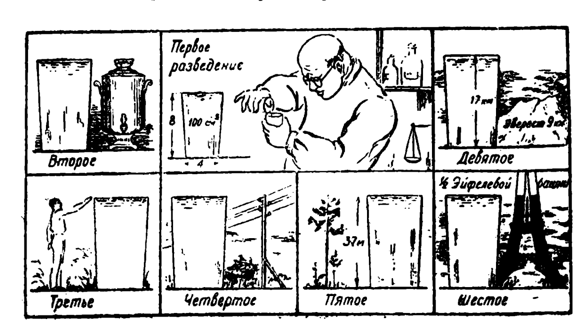
Возвращаясь от астрономии к медицине, приходим к такому выводу. Если признать, что 1 молекула росянкового настоя способна излечить коклюш, то больной должен для своего исцеления проглотить 70 тысяч капсул, каждая величиной с солнце, — порция для детского возраста несомненно чрезмерная...

После сказанного естественно поставить вопрос: что же содержат в себе пилюли гомеопатических аптек? Очевидно, все что угодно, только не лекарственное вещество. Легко рассчитать, что уже после 11-го разведения, когда 1 куб. см первоначального настоя разбавился в 10^{22} раза, в стакане жидкости окажется всего только одна молекула. Остальные 19 разведений будут состоять уже из чистого спирта, без малейших следов лекарственного вещества. Ведь беря из склянки (100 куб. см) один куб. см, едва ли посчастливится извлечь как раз тот кубик, в котором затеряна наша единственная молекула. 99 шансов против и только один — за. И уже во всяком случае так не будет 19 раз кряду; можно поручиться, что до 30-го разведения н и о д н а м о л е к у л а л е к а р с т в е н н о г о в е щ е с т в а н е д о й д е т. [1]

---

[1] Автором этого поучительного расчета является не кто иной, как всемирно известный датский физик Нильс Бор, сообщивший о нем советскому физику Г. А. Гамову; от последнего идея расчета дошла до меня благодаря любезности ленинградского физика М. П. Бронштейна.

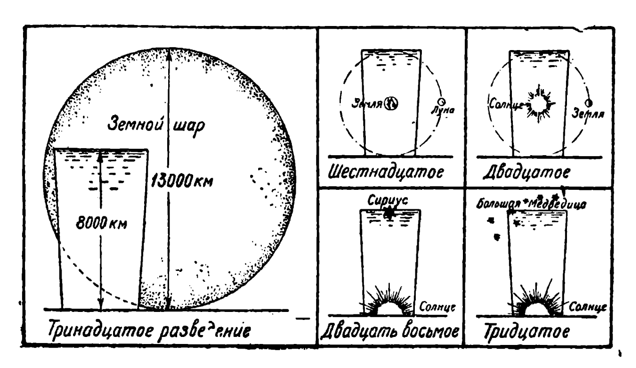
Раньше было замечено, что гомеопаты никогда не отдают себе отчета в математической стороне своих операций. Это не вполне верно. Русский химик А. М. Бутлеров, принадлежавший к сторонникам гомеопатии, ясно сознавал астрономическую огромность того количества



спирта, в котором разводится гомеопатическое лекарство. В одной из его статей читаем:

„Хотя все знают, что гомеопатические лекарства употребляются часто в больших разжижениях, но далеко не все имеют ясное представление, о каких именно величинах идет здесь речь... При каждом разжижении количество вещества делится на 10. Поэтому в сотом разжижении на 1 куб. мм первоначальной лекарственной тинктуры приходится такое количество алкоголя, которое, представленное в куб. мм, выражается цифрой, имеющей после себя сто нулей. Если представить себе всю эту массу жидкости в форме куба, то единица и 30 нулей, или один квинтиллион будет выраженная в метрах величина ребра куба... Простой расчет показывает, что в квинтиллионе метров содержится около 10 триллионов солнеч-

ных расстояний и около 7 биллионов расстояний от Земли до Сириуса... Если же взять двухтысячное разведение, то, выражая величину ребра куба жидкости в расстояниях Сириуса, мы имели бы цифру, заключающую не менее 646 знаков".



Это не мешало нашему химику с доверием относиться к сообщению, что „поваренная соль обнаруживает главный максимум действия именно в двухтысячном разведении".

Чудовищное разжижение не смущало сторонников гомеопатии и не ослабляло их веры в действие лекарств потому, что они, не зная числа молекул в 1 куб. см, ссылались на факт поглощения энергии материей при переходе в более тонкое состояние. „Образование воды из льда — пара из воды — сопровождается поглощением тепла; пар является, так сказать, резервуаром энергии" (Бутлеров). Но все подобные соображения, каковы бы они ни были, начисто отпадают, когда в пилюле нет буквально ни одной молекулы лекарственного вещества.

ЧЕТЫРЬМЯ ЕДИНИЦАМИ

Четырьмя единицами, не употребляя никаких знаков математических действий, написать возможно большее число.

Решение

Естественно приходящее на ум решение — 1111 — не отвечает требованию задачи, так как число

$$11^{11}$$

во много раз больше. Вычислять это число десятикратным умножением на 11 едва ли у кого хватит терпения. Но можно определить его величину гораздо быстрее — помощью логарифмических таблиц. Число это превышает 285 миллиардов и, следовательно, больше числа 1111 в 25 миллионов раз.

ТРЕМЯ ДВОЙКАМИ

Всем, вероятно, известно, как следует написать три цифры, чтобы изобразить ими возможно большее число. Надо взять три девятки и расположить их так:

$$9^{9^{9}}$$

Число это столь чудовищно велико, что никакие сравнения не помогают уяснить себе его грандиозность. Число электронов видимой вселенной ничтожно по сравнению с ним. В „Занимательной арифметике" уже говорилось об этом. Возвращаюсь к этой задаче лишь потому, что хочу предложить здесь по ее образцу другую:

Тремя двойками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

Решение

Под свежим впечатлением трехъярусного расположения девяток, вы, вероятно, готовы дать и двойкам такое же расположение:

$$2^{2^{2}}$$

Однако, на этот раз ожидаемого эффекта не получается. Написанное так число довольно мизерно, — меньше даже, чем ординарное 222. В самом деле: ведь мы написали всего лишь 2^4, т. е. 16.

Подлинно наибольшее число из трех двоек не 222 и не 22^2 (т. е. 484), а

$$2^{22} = 4\,194\,304.$$

Пример этот очень поучителен. Он показывает, что в математике опасно поступать по шаблону и что аналогия легко может повести к ошибочным заключениям.

ТРЕМЯ ТРОЙКАМИ

Теперь, вероятно, вы осмотрительнее приступите к решению следующей задачи.

Тремя тройками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

Решение

Трехъярусное расположение и здесь не приводит к ожидаемому эффекту, так как

$$3^{3^{3}}, \text{ т. е. } 3^{27}, \text{ меньше, чем } 3^{33}.$$

Последнее раеположение и дает ответ на вопрос задачи.

ТРЕМЯ ЧЕТВЕРКАМИ

Тремя четверками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

Решение

Если в этом случае вы поступите по образцу сейчас рассмотренных двух задач, т. е. дадите ответ

$$4^{44}$$

то промахнетесь, потому что на этот раз трехъярусное расположение



$$4^{4^{4}}$$

дает большее число. В самом деле, $4^4 = 256$, а 4^{256} больше 4^{44}.

ТРЕМЯ ОДИНАКОВЫМИ ЦИФРАМИ

Попытаемся углубиться в это озадачивающее явление: почему одни цифры порождают числовые исполины при трехъярусном расположении, другие — нет. Рассмотрим общий случай:

Тремя одинаковыми цифрами, не употребляя знаков действий, изобразить возможно большее число.

Обозначим цифру буквой a. Расположению

$$2^{22} \qquad 3^{33} \qquad 4^{44}$$

соответствует написание

$$a^{10a+a}, \text{ т. е. } a^{11a}$$

Расположение же трехъярусное представится в общем виде так:

$$a^{a^{a}}$$

Определим, при каком значении a второе расположение изображает бо́льшее число, нежели первое. Так как оба выражения представляют степени с равными основаниями, то бо́льшая величина отвечает большему показателю. Когда же

$$a^a > 11\,a?$$

Разделим обе части неравенства на a. Получим:

$$a^{a-1} > 11.$$

Легко видеть, что a^{a-1} больше 11 только при a, равном или большем 4, потому что

$$4^{4-1} > 11,$$

между тем как степени

$$3^2 \text{ и } 2^1$$

меньше 11.

Теперь понятны те неожиданности, с которыми мы сталкивались при решении предыдущих задач: для двоек и троек надо было брать одно расположение, для четверок и более — другое.

ЧЕТЫРЬМЯ ДВОЙКАМИ

Сделаем следующий шаг в развитии задач рассматриваемого рода и поставим наш вопрос для четырех одинаковых цифр, именно для двоек:

При каком расположении четыре двойки изображают наибольшее число?

Решение

Возможны 8 комбинаций:

$$2222,\ 222^2,\ 22^{22},\ 2^{222}$$

$$22^{2^{2}} \qquad 2^{22^{2}} \qquad 2^{2^{22}} \qquad 2^{2^{2^{2}}}$$

Какое же из этих чисел наибольшее?

Займемся сначала верхним рядом, т. е. числами в двухъярусном расположении.

Первое—2222—очевидно меньше трех прочих. Чтобы сравнить следующие два—

$$222^2 \text{ и } 22^{22},$$

преобразуем второе из них:

$$22^{22} = 22^{2 \times 11} = (22^2)^{11} = 484^{11}$$

Последнее число больше, нежели 222^2, так как и основание и показатель степени числа 484^{11} больше, чем числа 222^2.

Сравним теперь 22^{22} с четвертым числом первой строки — с 2^{222}. Заменим 22^{22} большим числом 32^{22} и покажем, что даже это бо́льшее число уступает по величине числу 2^{222}.

В самом деле:

$$32^{22} = (2^5)^{22} = 2^{110},$$

степень меньшая, нежели 2^{222}.

Итак, наибольшее число верхней строки 2^{222}.

Теперь нам остается сравнить между собой пять чисел, сейчас полученное и следующие четыре:

$$22^{2^2}, 2^{22^2}, 2^{2^{22}}, 2^{2^{2^2}}.$$

Последнее число, равное всего 2^{16}, сразу выбывает из состязания. Далее, первое число этого ряда, равное 22^4 и меньшее, чем 32^4 или 2^{20}, меньше каждого из двух следующих. Подлежат сравнению, следовательно, три числа, каждое из которых есть степень 2-х. Больше,

очевидно, та степень 2-х, показатель которой больше. Но из трех показателей

$$222,\ 484 \text{ и } 2^{20+2}\ (= 2^{10\cdot 2}\quad 2^2 = \text{около } 10^6\quad 4)$$

последний—наибольший.

Поэтому наибольшее число, какое можно изобразить четырьмя двойками, таково

$$2^{2^{22}}$$

Не обращаясь к услугам логарифмических таблиц, мы можем составить себе приблизительное представление о величине этого числа, пользуясь приближенным равенством

$$2^{10} = \text{около } 1000:$$

$$2^{22} = 2^{20}\quad 2^2 \doteq 4\quad 10^6.$$

$$2^{2^{22}} = \text{около } 2^{4000000} = \text{около } 10^{1200000}$$

Ясно, что в этом числе свыше миллиона цифр.



УНИВЕРСАЛЬНАЯ БИБЛИОТЕКА

РАССКАЗ КУРДА ЛАССВИЦА [1]

В завершение наших бесед о пятом математическом действии рассмотрим ряд вопросов, тесно связанных с проблемой, которая поставлена в остроумном рассказе немецкого ученого и беллетриста Курда Лассвица. Операции со степенями находят себе здесь весьма поучительное применение.

— Ну, садись же сюда, Макс, — сказал профессор.— В бумагах моих, право, ничего для твоей газеты не найдется.

— В таком случае, — отвечал Макс Буркель, — тебе придется что-нибудь написать для нее.

[1] Написан в 1904 году. Перевод с несущественными пропусками.

— Не обещаю. Написано уже, да к сожалению и напечатано, так много лишнего...

— Я и то удивляюсь, — вставила хозяйка, — что вы вообще находите еще что-нибудь новое для печатания. Кажется давно бы уж должно быть перепробовано решительно все, что мыслимо составить из вашей горсти типографских литер.

— Можно бы, пожалуй, так думать. Но дух человеческий поистине неистощим...

— В повторениях.

— О да,—рассмеялся Буркель, — но также и в изобретении нового.

— И несмотря на это,—заметил профессор, — можно изобразить буквами все, что человечество когда-либо создаст на поприще истории, научного познания, поэтического творчества, философии. По крайней мере, поскольку это поддается словесному выражению. Книги наши ведь заключают все знание человечества и хранят сокровища, накопленные работой мысли. Но число возможных сочетаний букв ограничено. Поэтому вся вообще возможная литература должна уместиться в конечном числе томов.

— Э, старина, в тебе говорит сейчас математик, а не философ. Может ли неисчерпаемое быть конечным?

— Позволь, я подсчитаю сейчас, сколько именно томов должна заключать такая универсальная библиотека... Дай-ка мне с письменного стола листок бумаги и карандаш,—обратился профессор к жене.

— Прихватите заодно и таблицы логарифмов,—сухо заметил Буркель.

— Они не понадобятся,—сказал профессор и начал: — Скажи мне, пожалуйста, если печатать экономно и отказаться от роскоши украшать текст разнородными шрифтами, имея в виду читателя, заботящегося лишь о смысле.

— Таких читателей не бывает.

— Ну, допустим, что они существуют. Сколько типографских литер потребовалось бы при таком условии для изящной и всякой иной литературы?

— Если считать лишь прописные и строчные буквы, обычные знаки препинания, цифры и, не забудем, шпации...

Племянница профессора вопросительно взглянула на говорившего.

— Это типографский материал для промежутков,— пояснил он, — которым наборщики разъединяют слова и заполняют пустые места. В итоге наберется не так уж много. Но для книг научных... У вас, математиков, такая масса символов...

— Нас выручают индексы, те маленькие цифры, которые мы помещаем при буквах: a_1, a_2, a_3, a_4 и т. д. Для этого понадобится лишь еще один или два ряда цифр от 0 до 9. Аналогичным образом можно условно обозначать и любые звуки чужих языков.

— Если так, то потребуется, я думаю, не более сотни различных знаков, чтобы выразить печатными строками все мыслимое.

— Теперь дальше. Какой толщины взять томы?

— Я полагаю, что можно вполне обстоятельно исчерпать тему, если посвятить ей том в 500 страниц. Считая на странице по 40 строк с 50 типографскими знаками в каждой (включаются, конечно, шпации и знаки препинания), имеем $40 \times 50 \times 500$ букв в одном томе, т. е. ... впрочем, ты подсчитаешь это лучше.

— Миллион букв, — сказал профессор. — Следовательно, если повторять наши 100 литер в любом порядке столько раз, чтобы составился том в миллион букв, мы получим некую книгу. И если вообразим все возможные

сочетания этого рода, какие только осуществимы чисто механическим путем, то получим полный комплект сочинений, которые когда-либо были написаны в прошлом или появятся в будущем.

Буркель хлопнул своего друга по плечу.

— Идет! Беру абонемент в твоей универсальной библиотеке. Тогда получу готовыми, в напечатанном виде, все полные комплекты моей газеты за будущие годы. Не придется заботиться о подыскании материала. Для издателя—верх удобства: полное исключение авторов из издательского дела. Замена писателя комбинирующей машиной, неслыханное достижение техники!

— Как! — воскликнула хозяйка. — В твоей библиотеке будет решительно все? Полный Гете? Собрание сочинений всех когда-либо живших философов?

— Со всеми разночтениями притом, какие никем еще даже не отысканы. Ты найдешь здесь полностью все утраченные сочинения Платона и Тацита и в придачу — их переводы. Далее, найдешь все будущие мои и твои сочинения, все давно забытые речи депутатов рейхстага и все те речи, которые еще должны быть там произнесены, полный отчет о международной мирной конференции и о всех войнах, которые за нею последуют... Что не уместится в одном томе, может быть продолжено в другом.

— Ну, благодарю за труд разыскивать продолжения

— Да, отыскивать будет хлопотливо. Даже и найдя том, ты еще не близок к цели: ведь там будут книги не только с надлежащими, но и с всевозможными неправильными заглавиями.

— А ведь верно, так должно быть!

— Встретятся и иные неудобства. Возьмешь в руки первый том библиотеки. Смотришь: первая страница— пустая, вторая — пустая, третья — пустая и т. д. все 500

страниц. Это тот том, в котором шпации повторены миллион раз....

— В такой книге не может быть, по крайней мере, ничего абсурдного,—заметила хозяйка.

— Будем утешаться этим. Берем второй том: снова все пустые страницы, и только на последней, в самом низу, на месте миллионной литеры приютилось одинокое *а*. В третьем томе — опять та же картина, только *а* передвинуто на одно местечко вперед, на последнем же месте — шпация. Таким порядком буква *а* последовательно передвигается к началу, каждый раз на одно место, через длинный ряд из миллиона томов, пока в первом томе второго миллиона благополучно достигнет, наконец, начального места. А за этой буквой в этом увлекательном томе нет ничего — белые листы. Такая же история повторяется и с другими литерами в первой сотне миллионов наших томов, пока все сто литер не совершат своего одинакового странствования от конца тома к началу. Затем то же самое происходит с группою *аа* и с любыми двумя другими литерами в всевозможных комбинациях. Будет и такой том, где мы найдем одни только точки; другой—с одними лишь вопросительными знаками.

— Но эти бессодержательные томы можно ведь будет сразу же разыскать и отбросить,—сказал Буркель.

— Пожалуй. Гораздо хуже будет, если нападешь на том, повидимому, вполне разумный. Хочешь, например, навести справку в „Фаусте" и берешь том с правильным началом. Но прочитав немного, находишь дальше что-нибудь в таком роде: „Фокус покус, во — и больше ничего" или просто: „*аааа*....". Либо же следует дальше таблица логарифмов, неизвестно даже — верная или неверная. Ведь в библиотеке нашей будет не только все истинное, но и всякого рода нелепости. Заголовкам до-

веряться нельзя. Книга озаглавлена, например, „История тридцатилетней войны“, а далее читаем: „Когда Блюхер при Фермопилах женился на дагомейской королеве“...

— О, это уж по моей части! — воскликнула племянница.—Такие томы я могла бы сочинить!

— Ну, в нашей библиотеке будут и твои сочинения: всё, что ты когда-либо говорила, и всё, что скажешь в будущем.

— Ах, тогда уж лучше не устраивай твоей библиотеки....

— Не бойся: эти твои сочинения появятся не за одной лишь твоей подписью, но и за подписью Гете и вообще с обозначением всевозможных имен, какие только существуют на свете. А наш друг журналист найдет здесь за своей ответственной подписью статьи, которые нарушают все законы о печати, так что целой жизни не хватит, чтобы за них отсидеть. Здесь будет его книга, в которой после каждого предложения заявляется, что оно ложно, и другая его книга, в которой после тех же самых фраз следует клятвенное заверение в их истинности.

— Ладно, — воскликнул Буркель со смехом. — Я так и знал, что ты меня подденешь. Нет, я не абонируюсь в библиотеке, где невозможно отличить истину от лжи, подлинное от фальшивого. Миллионы томов, притязающие на правдивое изложение истории Германии в XX веке, будут противоречить один другому. Нет, благодарю покорно!

— А разве я говорил, что легко будет отыскивать в библиотеке все нужное? Я только утверждал, что можно в точности определить число томов нашей универсальной библиотеки, где наряду со всевозможными нелепостями будет также вся осмысленная литература, какая только может существовать.

— Ну, подсчитай же, наконец, сколько это составит томов,—сказала хозяйка.—Чистый листок бумаги, я вижу, скучает в твоих пальцах.

— Расчет так прост, что его можно выполнить и в уме. Как составляем мы нашу библиотеку? Помещаем сначала однократно каждую из сотен наших литер. Затем присоединяем к каждой из них каждую из ста литер, так что получаем сотню сотен групп из двух букв. Присоединив в третий раз каждую литеру, получаем $100 \times 100 \times 100$ групп из трех знаков и т. д. А так как мы должны заполнить миллион мест в томе, то будем иметь такое число томов, какое получится, если взять число 100 множителем миллион раз. Но $100 = 10 \times 10$; поэтому составится то же, что и от произведения двух миллионов десятков. Это, проще говоря, единица с двумя миллионами нулей. Записываю результат так: десять в двухмиллионной степени

$$10^{2000000}.$$

Профессор поднял руку с листом бумаги.

— Да, вы, математики, умеете-таки упрощать свои записи,—сказала хозяйка.—Но напиши-ка это число полностью.

— О, лучше и не начинать; пришлось бы писать день и ночь две недели подряд, без передышки. Если бы его напечатать, оно заняло бы в длину 4 километра.

— Уф!—изумилась племянница.—Как же оно выговаривается?

— Для таких чисел и названий нет. Никакими средствами невозможно сделать его сколько-нибудь наглядным — настолько это множество огромно, хотя и безусловно конечно. Все, что мы могли бы назвать из области невообразимо больших чисел, исчезающе мало рядом с этим числовым чудовищем.

— А если бы мы выразили его в триллионах? — спросил Буркель.

— Триллион число внушительное: единица с 18 нулями. Но если ты разделишь на него число наших томов, то от двух миллионов нулей отпадает 18. Останется единица с 1 999 982 нулями — число столь же непостижимое, как и первое. Впрочем... — профессор сделал на листке бумаги какие-то выкладки.

— Я была права: без письменного вычисления не обойдется, — заметила его жена.

— Оно уж кончено. Могу теперь иллюстрировать наше число. Допустим, что каждый том имеет в толщину 2 сантиметра и все томы расставлены в один ряд. Какой длины, думаете вы, будет этот ряд?

Он с торжеством взирал на молчащих собеседников. Последовало неожиданное заявление племянницы:

— Я знаю, какую длину займет ряд. Сказать?

— Конечно.

— Вдвое больше сантиметров, чем томов.

— Браво, браво! — подхватили кругом. — Точно и определенно.

— Да, — сказал профессор, — но попытаемся представить это наглядно. Вы знаете, что свет пробегает в секунду 300 000 километров, т. е. в год 10 биллионов километров, или триллион сантиметров. Если, значит, библиотекарь будет мчаться вдоль книжного ряда с быстротой света, то за два года он успеет миновать всего только один триллион томов. А чтобы обозреть таким манером всю библиотеку, понадобилось бы лет дважды единица с 1 999 982 нулями. Вы видите, что даже число лет, необходимое для обозрения библиотеки, столь же трудно себе представить, как и число самих томов. Здесь яснее всего сказывается полная бесполезность всяких

попыток наглядно представить себе это число, хотя, повторяю, оно и конечно.

Профессор хотел было уже отложить листок, когда Буркель сказал:

— Если собеседницы наши не запротестуют, я позволю себе задать еще только один вопрос. Мне кажется, что для придуманной тобою библиотеки не хватит места в целом мире. Так ли?

— Это мы сейчас узнаем, — сказал профессор и снова взялся за карандаш. Сделав выкладки, он объявил:

— Если нашу библиотеку сложить так, чтобы каждые 1000 томов заняли один кубический метр, то целую вселенную, до отдаленнейших туманностей, пришлось бы заполнить такое число раз, которое короче нашего числа томов всего лишь на 60 нулей. Словом, я был прав: никакими средствами невозможно приблизиться к наглядному представлению этого исполинского числа.



Приступая к разбору рассказа, сделаем сначала два пояснения по поводу отдельных его мест.

1. Как выполняется подсчет числа томов универсальной библиотеки?

Помещая по одной литере в книге, мы займем первые места в 100 томах, так как всех литер (различных) у нас сотня.

Рядом с каждой сейчас поставленной литерой можно поместить снова каждую из ста литер, составив таким образом двубуквенных сочетаний

$$100 \times 100 = 100^2.$$

Заполнив в каждом из 100^2 томов третье место одной из сотни литер, получим трехбуквенных сочетаний

$$100^2 \times 100 = 100^3.$$

По заполнении четвертого места будем иметь 4-буквенных сочетаний 100^4 и т. д. Ясно, что сочетаний из 1 000 000 букв может существовать:

$$100^{1000000} = (10^2)^{1000000} = 10^{2000000}.$$

2. Верно ли, что книгами универсальной библиотеки можно было бы огромное число раз заполнить все пространство видимой вселенной?

Да, здесь нет никакого преувеличения. Это было верно для тех взглядов на размеры вселенной, которые господствовали в эпоху написания рассказа и остается верным даже при современных представлениях. Согласно новейшим исследованиям, самый отдаленный предмет, какой усматривается в могущественнейший телескоп, находится от нас в расстоянии 140 миллионов так называемых „световых лет". „Световой год" — путь, проходимый световым лучом в течение 1 года, — равен, круглым числом, 10 биллионам, или 10^{13} км. Расстояние до крайнего видимого предмета мы можем рассматривать, как радус видимой вселенной. Он равен, следовательно,

$$140.10^6 \times 10^{13} \text{ км} = 14.10^{20} \text{ км} = 14.10^{23} \text{ м}.$$

Из геометрии известно, что объем шара =

$$\frac{4}{3} \times 3{,}14 \times (\text{радиус})^3$$

Следовательно, объем видимой вселенной равен

$$\frac{4}{3} \times 3{,}14 (14.10^{23})^3 = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 2744 \times 10^{69} =$$

$= 11500 \times 10^{69} = 10^{73}$ куб. метров.

Полагая, что в 1 куб. метре помещается 1000 томов, определяем, что во вселенной могло бы поместиться „только"

$$10^{73} \times 10^3 = 10^{76} \text{ томов.}$$

Что это по сравнению с $10^{2000000}$? Ничтожно малая величина...

МЫСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

Обратимся теперь к основной идее рассказа. Она представляется нам не более, как занимательной игрой ума. А между тем, мысль эта имеет длинную историю, которая восходит к средним векам. Было время, когда ею увлекались совершенно серьезно.

Впервые подобная идея была высказана испанским философом XIII века Раймондом Люллием, будто бы придумавшим способ автоматически выводить из общих понятий всевозможные истины. Поясним своеобразный ход его рассуждений на одном примере. Возьмем понятие „золото" и ряд понятий, обозначающих цвета: синий, зеленый, желтый, красный, белый, черный и т. д. Будем сочетать понятие „золото" последовательно со всеми понятиями цвета. Получим ряд положений:

золото — синее, золото — красное, золото — желтое, золото — белое и т. д.

В этом перечне, составленном чисто-механическим путем, должно заключаться (если список цветов был полон)

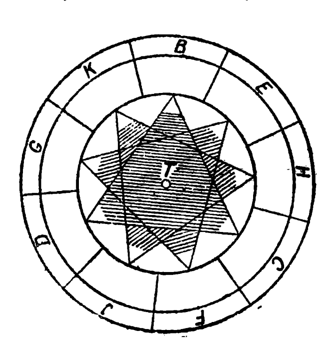
среди других также и истинное утверждение о цвете золота. Будь цвет золота нам неизвестен, мы могли бы его узнать, не исследуя вовсе самого металла, — если бы только сумели выудить единственно правильное утверждение из перечня остальных неверных. Люллий был глубоко убежден, что, сочетая понятие „золото" также с другими понятиями (помимо цвета), возможно будет путем перекрестного сопоставления различных перечней безошибочно обнаружить в них истинные утверждения. Этот воображаемый метод открывать истины путем автоматического анализа понятий Люллий называл своим „великим искусством".

Средневековый ученый придумал даже механический прибор для облегчения подобных умственных операций. Прибор состоял из нескольких подвижных концентрических кругов, разделенных поперечными линиями на отделения, в которых обозначались общие понятия. Вследствие концентричности кругов, подразделения каждого из них занимали определенное положение относительно подразделений прочих кругов, а вращая круги, можно было получать множество новых сочетаний. Эти круги в совокупности обнимали всю область средневекового знания.

Рисунок страницы 36-й воспроизводит одну из моделей Люллиевой вертушки. Видны три круга, один внутри другого вращающиеся около общего центра *T*. На краях наружного круга 9 букв *BEHCF*... означают некоторые общие понятия; в 9 отделениях средней кольцевой полосы помещался другой ряд понятий, и, наконец, на третьем внутреннем круге возле углов девятиконечной звезды размещался еще третий ряд понятий. Ясно, что, поворачивая круги, можно создать всевозможные комбинации этих трех групп понятий. Общее число их нетрудно подсчитать:

$$3^9 = \text{около } 21000.$$

В наши дни с трудом верится, что подобная игрушка могла глубоко взволновать умы той сумрачной эпохи. Но не забудем, что Люллий жил в век религиозных и всяких иных суеверий. Радужные надежды, которые изобретатель возлагал на свою вертушку, нашли отклик в сердцах современников и горячо разделялись „ученым миром“ его эпохи. Многие прониклись радостным убеждением, что „великое искусство“ Люллия открывает прямой путь к быстрому разрешению всех проблем науки, всех загадок бытия, всех тайн земли и неба. С необычайным рвением принялись испытывать „искусство“ Люллия. Философы, астрологи, алхимики искали с помощью вертушки разрешения занимавших их вопросов. Все единодушно считали Люллия величайшим ученым эпохи и слепо верили в его учение.



Целое столетие держалось увлечение мыслительной рулеткой, прежде чем передовые умы постигли простую мысль, что эта бесплодная затея не может оправдать возлагаемых на нее надежд. Остановка была за малым не удалось найти способа извлекать жемчужины истины из того океана бессмыслицы, которым затопляла человеческие умы вертушка испанского философа. Умственная эпидемия ослабела, машинка Люллия утратила приверженцев, и люди постепенно обратились к единственно верному пути познания мира, основанному на терпеливом исследовании самой природы.

Однако, идея Люллия в том или ином виде и впоследствии находила отдельных сторонников. Среди них были и великие мыслители. Джордано Бруно (XVI век), например, долго пытался извлечь здоровое ядро из учения средневекового философа, много размышляя о его мыслительной вертушке, произносил на эту тему публичные речи, но постепенно пришел к мысли, что возможная польза изобретения Люллия весьма сомнительна и сводится лишь к некоторому облегчению памяти. Столь же безрезультатно занимался „вертушкой понятий" и Афанасий Кирхнер, ученый XVII века.

Мало кому известно (биографы почти не касаются этого), что и такой могучий ум, как Лейбниц, много размышлял над вертушкой Люллия. Но для этого философа и великого математика увлечение идеей механизации мысли не прошло бесследно: в результате он изобрел счетную машину (1671 г.), более совершенную нежели та, которая двадцатью годами раньше была придумана Паскалем.

Прямой логической связи между вертушкой Люллия и счетной машиной в сущности нет. Идеи, положенные в их основу, скорее противоположны. Машинка Люллия дает всевозможные сочетания, которые все, кроме одного, неверны. В счетной машине, наоборот, появляется только та единственно верная комбинация, которую машинка Люллия бессильна отыскать. Некоторого внешнего сходства между обоими приборами оказалось достаточным, чтобы натолкнуть мысль Лейбница на правильный путь и помочь ему сделать полезное изобретение из бесплодной идеи. Машины для автоматического решения уравнений (мы будем говорить о них дальше) тоже имеют с вертушкой Люллия лишь чисто внешнее сходство.[1]

---

[1] То же относится и к так называемой „логической машине" Джевонса.

В эпоху Свифта, 200 лет назад, увлечение мыслительными машинами было, очевидно, еще очень сильно, потому что автор „Путешествий Гулливера“ высмеял его в своей бессмертной сатире. В той части, где повествуется о путешествии в Лапуту, мы находим следующее место, посвященное мыслительной машине.

„Мы зашли во второе отделение Академии. Первый из профессоров, с которым мне пришлось познакомиться, заседал в большой комнате, окруженный 40 студентами. Заметив, что я внимательно рассматриваю стоячую раму, занимавшую большую часть комнаты, он сказал:

„— Быть может, вас удивит, что, будучи специалистом по выработке и усовершенствованию отвлеченных знаний, я намерен достичь этой цели посредством механического аппарата. Но мир скоро оценит всю целесообразность моего проекта, и я даже уверен, что никогда еще доселе не зарождалось в мозгу человеческом столь гениальной идеи. Известно как трудно изучение наук и искусств по общепринятой методе; но едва войдет во всеобщее употребление мой механический аппарат, — самый невежественный человек получит возможность писать всякие книги: философские и юридические трактаты, сочинения по богословию и математике, политические памфлеты и даже стихи, ибо, чтобы сочинять книги, не понадобится тогда ни эрудиции, ни таланта“.

„С этими словами профессор подвел меня к раме, по бокам которой стояли рядом его ученики. Рама была квадратной формы и имела 20 футов в длину и высоту. По всей раме, от края до края, были натянуты проволоки с нанизанными на них кубиками, в среднем величиной с игральную кость. На сторонах каждого кубика были написаны слова лапутского языка во всех их грамматических формах — временах, наклонениях, падежах, — но без всякой системы. По команде профессора, 40 сту-

дентов взялись за 40 рукояток по краям рамы, повернули их на один оборот — и расположение слов в раме совершенно изменилось. Профессор приказал 36 студентам прочесть про себя все слова, появившиеся в раме, и когда из них составлялась осмысленная фраза, диктовать ее четырем прочим студентам. Эту манипуляцию проделали раза четыре, — и всякий раз в раме получались новые комбинации слов.

„Студенты занимались этой работой по шести часов в день, и профессор показал мне несколько фолиантов, составленных из фраз, которые появлялись на деревяшках. Он намеревался рассортировать этот богатый материал, подобрать по предметам и таким образом обогатить мир полной библиотекой книг по всем отраслям знания. Его работа, говорил он, была бы успешнее, если бы имелись средства на сооружение 500 таких машин и все заведующие машинами работали бы сообща".

ЛИТЕРАТУРНЫЙ АВТОМАТ

У К. Лассвица та же идея появляется в новой форме. В рассказе „Универсальная библиотека" автор оперирует не с целыми понятиями, не со словами, а просто с литерами, т. е. еще более обнажает механическую природу метода и тем самым выпуклее обнаруживает его практическую несостоятельность.

Но нельзя признать, что критика К. Лассвица в корне отметает все сомнения в осуществимости механического творчества. Он берет чересчур грандиозные рамки для своего метода, оперирует с миллионом литер, и у читателя может сложиться убеждение, что в этой грандиозности и кроется причина неуспеха. Ведь можно, казалось бы, вполне обойтись, например, одной тысячью букв. Легко вообразить себе буквопечатающий механизм

наподобие общеупотребительного нумератора, который последовательно печатает все сочетания, возможные при наборе текста из 1 000 букв. Когда работа будет выполнена, т. е. целиком будут исчерпаны все возможные комбинации букв, мы отбросим бессмысленные сочетания, и у нас в руках очутятся все литературные отрывки, какие мыслимо написать тысячью литерами. А именно: по отдельным страницам, по полустраницам будем мы иметь все, что когда-либо было написано и когда-либо будет написано в прозе и стихах на русском языке и на всех существующих и будущих языках (потому что любое иностранное слово можно ведь передать буквами русского алфавита). Все романы и рассказы, все научные сочинения и доклады, все журнальные и газетные статьи и известия, все стихотворения, все разговоры, когда-либо слышанные всеми прежде жившими, и все то, что еще предстоит передумать и высказать людям грядущих поколений...

Самый механизм можно представить себе осуществленным примерно в таком виде. Вообразите шестеренку, на ободе которой помещается 100 различных литер. Пусть высота и ширина одной литеры — 2 миллиметра. Окружность шестеренки в 2×100, т. е. в 200 миллиметров, имеет диаметр меньше 7 сантиметров. Толщина шестеренки может быть немного шире литеры — пусть в 4 мм. Вообразим 1 000 таких шестеренок, насаженных рядом на одну общую ось. Получим вал длиною 4 метра и толщиною 7 см. Шестеренки соединены между собой так, как это делается в нумераторах и в счетных машинах, а именно: при полном повороте первой шестеренки вторая повертывается на одну литеру, при полном повороте второй — третья повертывается на одну литеру, и так до последней 1 000-й шестеренки. Валик покрывается типографской краской и делает оттиски на длинной,

4-метровой бумажной полосе. Вот и все устройство машины.

Работает же она так. Шестеренки вращаются последовательно. Сначала начинает вращаться первая и дает на бумаге оттиски своих литер, — это первые 100 „литературных произведений" из категории бессмысленных. Когда она обернется один раз, она вовлекает во вращение вторую шестеренку: та повертывается на одну литеру и остается в этом положении, пока первая продолжает вращаться; получим еще 100 оттисков, теперь уже из двух букв. После 100 таких оборотов вторая шестеренка повертывается еще на одну литеру, опять обе дают 100 новых оттисков, и т. д. Когда же и вторая сделает полный оборот, присоединяется третья шестеренка; получаются всевозможные оттиски из трех литер. И так далее, пока не дойдет очередь до последней, 1 000-й шестеренки. Когда 1 000-я шестеренка сделает полный оборот, все возможные комбинации в 1 000 литер будут исчерпаны, и останется лишь работа по разборке оттисков.

Мы нарочно остановились на подробностях конструкции машины, чтобы придать проекту большую конкретность и убедительность. И действительно, на первый взгляд проект кажется вполне осуществимым. Однако несложный расчет обнаруживает его несбыточность. Пусть шестеренки вертятся с быстротой 30 000 оборотов в минуту — самой большой, достижимой в современной технике. Первые несколько шестеренок будут вступать в работу спустя секунды и минуты одна после другой. Но не трудно вычислить, что следующие шестеренки будут запаздывать все более и более; при 30 000 оборотов в секунду

2-я шестеренка начнет работать спустя

$$\frac{60}{30\,000} = \frac{1}{500} \text{ мин.},$$

3-я шестеренка начнет работать спустя

$$\frac{60 \times 60}{30\,000} = \frac{3}{25} \text{ мин.},$$

4-я шестеренка начнет работать спустя

$$\frac{60 \times 60 \times 60}{30\,000} = 7{,}2 \text{ мин.},$$

5-я шестеренка начнет работать спустя

$$\frac{60^4}{30\,000} = 7{,}2 \text{ часа},$$

6-я шестеренка начнет работать спустя

7,2 часа $\times$ 60 = 18 суток,

7-я шестеренка начнет работать спустя

18 суток $\times$ 60 = 3 года,

8-я шестеренка начнет работать спустя

3 года $\times$ 60 = 180 лет,

и т. д.

12-я шестеренка начнет работать спустя

233 280 000 лет.

Надо ли продолжать? Если 12-я шестеренка начнет вращаться только через двести слишком миллионов лет, то когда дойдет очередь до 1000-й? Нетрудно вычислить. Число минут выразится числом

$$\frac{60^{1000}}{30\,000}$$

— числом, в котором 1775 цифр!

Ясно, что все звезды успеют погаснуть миллион раз, прежде чем начнет работать последняя шестеренка и труд машины будет вполне закончен. Не говорим уже о том, что во вселенной не хватит материала для всех оттисков.

Ведь в доступной нашему исследованию вселенной не более 10^{77} электронов; значит, даже если бы каждый оттиск состоял из одного электрона, можно было бы отпечатать лишь ничтожную долю всей продукции „литературной машины“. Перерабатывать старые оттиски вновь на бумагу? Но допуская даже при этом ничтожнейшую потерю материи в 1 биллионную долю, мы должны были бы иметь — считая снова по электрону на оттиск — число оттисков из 1767 цифр, а электронов у нас имеется число всего из 78 цифр...

Можно возразить, пожалуй, что незачем ждать окончания работы „литературной“ машины: шедевры литературы и замечательные открытия могут случайно оказаться среди первого миллиона оттисков. При невообразимо огромном числе всех возможных сочетаний эта вероятность еще более ничтожна, чем вероятность случайно наткнуться на один определенный электрон среди всех электронов вселенной. Число электронов во вселенной неизмеримо меньше, чем общее число возможных оттисков нашей машины.

Но пусть даже осуществилось несбыточное, пусть случилось чудо, и в наших руках имеется сообщение о научном открытии, появившееся из-под машины без участия творческой мысли. Сможем ли мы этим открытием воспользоваться?

Нет, мы даже не сможем признать это открытие. Ведь у нас не будет критерия, который позволил бы нам отличить истинное открытие от многих мнимых, столь же авторитетно возвещаемых в процессе работы нашей машины. Пусть, в самом деле, машина дала нам отчет о превращении ртути в золото. Наряду с правильным описанием этого открытия будет столько же шансов иметь множество неправильных его описаний, а кроме того описаний и таких невозможных процессов, как превраще-

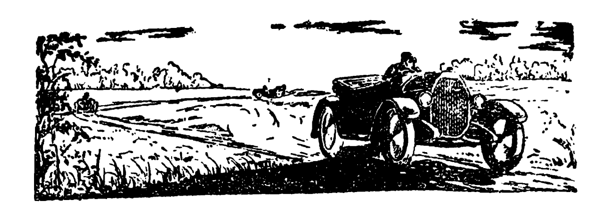
ние меди в золото, марганца в золото, кальция в золото и т. д. Оттиск, утверждающий, что превращение ртути в золото достигается при высокой температуре, ничем не отличается от оттиска, предписывающего прибегнуть к низкой температуре, при чем могут существовать варианты оттисков с указанием всех температур от минус бесконечность до плюс бесконечность. С равным успехом могут появиться из-под машины указания на необходимость пользоваться высоким давлением (тысячи вариантов), электризацией (опять тысячи вариантов), разными кислотами (снова тысячи и тысячи вариантов) и т. п.

Как при таких условиях отличить подлинное открытие от мнимого? Пришлось бы тщательно проверять на опыте каждое указание (кроме, конечно, явно нелепых), т. е. проделать такую огромную лабораторную работу, которая совершенно обесценила бы всю экономичность идеи „литературной" машины.

Точно также пришлось бы проделать обширные исторические изыскания, чтобы проверить правильность каждого исторического факта, утверждаемого каким-нибудь продуктом механического производства открытий. Словом, в виду полной невозможности отличать истину от вздора, подобный механический способ двигать науку вперед был бы совершенно бесполезен, даже если бы и удалось дождаться осмысленного оттиска.

Поучителен следующий расчет французского математика Бореля (в книге „Случай"): вероятность выпадения орла 1000 раз подряд при игре в орлянку равна 2^{1000}, т. е. числу, содержащему около 300 цифр. Этот шанс приблизительно таков же, как и шанс получить две первых строки определенного стихотворения, вынимая наудачу из шапки буквы по следующему способу: в шапке 25 букв, одна из них вынимается, записывается и кладется обратно в шапку; после встряхивания вынимается

вторая и т. д. Строго говоря, получить таким образом две первых строки определенного стихотворения вполне возможно. „Однако, — справедливо замечает Борель, — это представляется нам до такой степени маловероятным, что если бы подобный опыт удался на наших глазах, мы считали бы это плутовством".



ГЛАВА ВТОРАЯ

ЯЗЫК АЛГЕБРЫ

ИСКУССТВО СОСТАВЛЯТЬ УРАВНЕНИЯ

Язык алгебры — уравнения. „Чтобы решить вопрос, относящийся к числам или к отвлеченным отношениям величин, нужно лишь перевести задачу с родного языка на язык алгебраический“,—писал великий Ньютон в своем учебнике алгебры, озаглавленном „Всеобщая арифметика“. Как именно выполняется такой перевод с родного языка на алгебраический, Ньютон показал на примерах. Вот один из них:

На родном языке:	На языке алгебры:
Купец имел некоторую сумму денег.	
В первый год он истратил 100 фунтов.	$x - 100$
К оставшейся сумме добавил третью ее часть.	$(x - 100) + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$

На родном языке:	На языке алгебры:
В следующем году он вновь истратил 100 фунтов	$\frac{4x-400}{3}-100=\frac{4x-700}{3}$
И увеличил оставшуюся сумму на третью ее часть.	$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=$ $=\frac{16x-2800}{9}$
В третьем году он опять истратил 100 фунтов.	$\frac{16x-2800}{9}-100=$ $=\frac{16x-3700}{9}$
После того как он добавил к остатку третью его часть,	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}=$ $=\frac{64x-14800}{27}$
капитал его стал вдвое больше первоначального.	$\frac{64x-14800}{27}=2x$

Чтобы определить первоначальный капитал купца, остается только решить последнее уравнение.

Решение уравнений—зачастую дело нетрудное; составление уравнений по данным задачи затрудняет больше. Вы видели сейчас, что искусство составлять уравнения действительно сводится к уменью переводить с родного языка на алгебраический. Но язык алгебры весьма немногословен; поэтому перевести на него удается без труда далеко не всякий оборот родной речи. Переводы попадаются различные по трудности, как убедится читатель из ряда приведенных далее примеров на составление уравнений первой степени.

ЖИЗНЬ ДИОФАНТА

История не сохранила нам никаких черт биографии замечательного древнего математика Диофанта. Все, что известно о нем, почерпнуто из надписи на его гробнице, надписи, составленной в форме математической задачи. Мы приводим далее эту надпись сразу в двух переводах — на русский язык и на алгебраический.

По русски	На языке алгебры
Путник! Здесь прах погребен Диофанта. И числа поведать Могут, о чудо, сколь долог был век его жизни.	
Часть шестую его представляло прекрасное детство;	$\frac{x}{6}$
Двенадцатая часть протекла еще жизни — покрылся Пухом тогда подбородок;	$\frac{x}{12}$
Седьмую в бездетном Браке провел Диофант.	$\frac{x}{7}$
Прошло еще пять лет, Был осчастливлен рожденьем прекрасного первенца сына,	5
Коему рок половину лишь жизни, прекрасной и светлой, Дал на земле по сравненью с отцом.	$\frac{x}{2}$
И в печали глубокой Старец земного удела конец воспринял, переживши Года четыре с тех пор, как сына лишился.	$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4.$

Скажи, скольких лет жизни достигнув,
Смерть восприял Диофант?

Решение

Решив уравнение и найдя $x=84$, узнаем следующие черты биографии Диофанта: он женился 21 года, стал отцом на 38-м году, потерял сына на 80-м году и умер 84 лет.

ЛОШАДЬ И МУЛ

Вот еще несложная старинная задача, легко переводимая с родного языка на алгебраический.

„Лошадь и мул шли бок-о-бок, с тяжелой поклажей на спине. Лошадь жаловалась на свою непомерно-тяжелую ношу. „Чего ты жалуешься? — отвечал ей мул. — Ведь если я возьму у тебя один мешок, ноша моя станет вдвое тяжелее твоей. А вот если бы ты сняла с моей спины один мешок, твоя поклажа стала бы одинакова с моей".

Скажите же, мудрые математики, сколько мешков несла лошадь и сколько нес мул?

Решение

Если я возьму у тебя один мешок,	$x-1$
ноша моя	$y+1$
станет вдвое тяжелее твоей.	$y+1=2(x-1)$
А если бы ты сняла с моей спины один мешок,	$y-1$
твоя поклажа	$x+1$
стала бы одинакова с моей.	$y-1=x+1$

Мы привели задачу к системе уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} y+1&=2\,(x-1) \\ y-1&=x+1 \end{aligned}\right\} \text{ или } \left\{\begin{aligned} 2x-y&=3 \\ y-x&=2 \end{aligned}\right.$$

Решив ее, находим $x=5$; $y=7$. Лошадь несла 5 мешков, мул 7.

ЧЕТВЕРО БРАТЬЕВ

У четырех братьев 45 рублей. Если деньги первого увеличить на 2 рубля, деньги второго уменьшить на 2 рубля, деньги третьего увеличить вдвое, а деньги четвертого уменьшить вдвое, — то у всех окажется поровну. Сколько было у каждого?

Решение

Переведем задачу на язык алгебры.

У четырех братьев 45 руб.	$x+y+z+t=45$
Если деньги первого увеличить на 2 руб.,	$x+2$
деньги второго уменьшить на 2 руб.,	$y-2$
деньги третьего увеличить вдвое,	$2z$
деньги четвертого уменьшить вдвое, —.	$\frac{t}{2}$
то у всех окажется поровну.	$x+2=y-2=2z=\frac{t}{2}$

Расчленяем второе уравнение на три отдельны

$$x + 2 = y - 2$$
$$x + 2 = 2z$$
$$x + 2 = \frac{t}{2},$$

откуда

$$y = x + 4$$
$$z = \frac{x + 2}{2}$$
$$t = 2x + 4.$$

Подставив эти значения в первое уравнение, получаем:

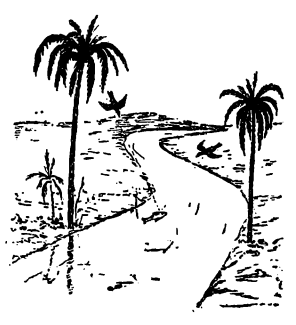
$$x + x + 4 + \frac{x+2}{2} + 2x + 4 = 45,$$

откуда $x = 8$. Далее находим: $y = 12$; $z = 5$; $t = 20$. Итак, у братьев было:

8 р., 12 р., 5 р., 20 р.

ПТИЦЫ У РЕКИ

У арабского математика XI века находим следующую задачу.



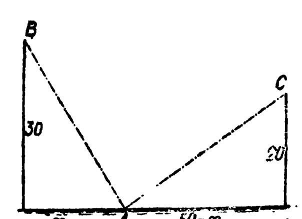
На обоих берегах реки, одна против другой, растет по пальме. Высота одной—30 локтей, другой—20 локтей; расстояние между их основаниями — 50 локтей. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно обе птицы заметили рыбу, выплывшую к поверхности воды между пальмами; они кинулись к ней разом и достигли ее одновременно.

В каком расстоянии от основания более высокой пальмы появилась рыба?

Решение

Из схематического чертежа, пользуясь теоремой Пифагора, устанавливаем:

$$\overline{AB}^2 = 30^2 + x^2; \qquad \overline{AC}^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$



Но $AB = AC$, так как обе птицы пролетели эти расстояния в одинаковое время. Поэтому

$$30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

Раскрыв скобки и сделав упрощения, получаем уравнение первой степени

$$100x = 2000,$$

откуда

$$x = 20.$$

Рыба появилась в 20 локтях от той пальмы, высота которой 30 локтей.

ДЕД И ВНУК

— Знаете, дедушка: я сейчас рассчитал, что в год 25-летия Октябрьской революции, в 1942 году, мне будет как раз столько лет, сколько выражают последние две цифры года моего рождения.

— И мне тоже, — ответил дед.

Сколько лет каждому?

Решение

Задача при беглом взгляде кажется невозможной: выходит как будто, что дед и внук одного возраста. Ясно, однако, что они родились в разных столетиях: внук в XX, дед — в XIX.

Уравнение для возраста внука составляется так. Пусть ему теперь x лет. Последние две цифры года его рождения, согласно условию задачи, выражают число x. А так как он родился в XX веке, то год его рождения обозначится через $1900+x$. В 1942 г. ему будет $1900+x+x$. Имеем уравнение:

$$1900+2x=1942,$$

откуда $x=21$ внуку 21 год.

Возраст деда определяется из уравнения:

$$1800+2x=1942,$$

откуда $x=71$.

Итак, внуку 21 год, деду 71.

ПРОДАЖА ЧАСОВ

Куплено двое часов за 220 рублей и затем проданы: одни с 10% прибыли, другие с 10% убытка. В общем итоге получено было 5% прибыли. Сколько порознь заплачено за часы при первоначальной покупке?

Решение

Обозначим искомую стоимость первых часов через x, тогда стоимость вторых выразится через $220-x$.

Первые часы проданы были с прибылью в 0,1 их стоимости, т. е. за $x+0{,}1x=1{,}1x$. Вторые проданы с убытком в 0,1 их стоимости, т. е. за $(220-x)$.

Сумма, вырученная от продажи обоих часов, на 5% больше их стоимости, т. е. составяяла $220+0{,}05\ .\ 220=$ $=200\times1{,}05$. Имеем уравнение:

$$1{,}1x+0{,}9\ (220-x)=220\ .\ 1{,}05,$$

отсюда $x=165$; $220-x=55$.

Первые часы стоили 165 р., вторые — 55.

Двое часов проданы по одной цене. При продаже первых получено 20% убытка, при продаже вторых — 20% прибыли. В общем же продажа дала 5 рублей убытка. Определить себестоимость часов.

Решение

Здесь два неизвестных: себестоимость первых часов, которую мы обозначим через x, и себестоимость вторых — y. Продажная цена первых часов $x - 0{,}2x = 0{,}8x$, вторых $y + 0{,}2y = 1{,}2y$.

Имеем уравнение

$$0{,}8x = 1{,}2y, \text{ или } 2x = 3y.$$

Так как у нас два неизвестных, то одного уравнения недостаточно для их нахождения. Составим второе, выразив в нем ту часть условия, которая не вошла в первое уравнение, а именно, что продажа дала 5 рублей убытка:

$$(x + y) - (0{,}8x + 1{,}2y) = 5.$$

Преобразуем его:

$$x + y - 0{,}8x - 1{,}2y = 5$$
$$0{,}2x - 0{,}2y = 5$$
$$2x - 2y = 50.$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x = 3y \\ 2x - 2y = 50. \end{cases}$$

Подставив во второе уравнение, вместо $2x$, равную им величину $3y$, получаем

$$y = 50.$$

Легко найти теперь, что $x = 75$ рублей.

Себестоимость часов 75 руб. и 50 руб.

ПРОГУЛКА

Следующая задача изложена одним английским п телем в беллетристической форме:

— Зайдите ко мне завтра днем на чашку чая,— сказал старый доктор своему знакомому.

— Благодарю вас. Я выйду в три часа. Может быть, и вы надумаете прогуляться, так выходите в то же время. Встретимся на полупути.

— Вы забываете, что я старик, шагаю в час всего только 3 километра, а вы, молодой человек, проходите при самом медленном шаге 4 километра в час. Не грешно бы дать мне немного вперед.

— Справедливо. Так как я прохожу больше вас на 1 километр в час, то, чтобы уравнять нас, дам вам этот километр, т. е. выйду на четверть часа раньше. Достаточно?

— Очень любезно с вашей стороны,—поспешил согласиться старик.

Молодой человек так и сделал: вышел из дому в три четверти третьего и шел со скоростью 4 километра в час. А доктор вышел ровно в три и делал по 3 километра в час. Когда они встретились, старик повернул обратно и направился домой вместе с молодым другом.

Только за чаем сообразил молодой человек, что с льготной четвертью часа вышло не совсем ладно. Он сказал доктору, что из-за этого ему придется в общем итоге пройти вдвое больше, чем доктору.

Не вдвое, а вчетверо,—возразил доктор, и был прав.

Как далеко от дома доктора до дома его молодого знакомого?

Решение

Обозначим расстояние между домами через x.

Молодой человек всего прошел $2x$, а доктор вчетверо ньше т. е. $\frac{x}{2}$. До встречи доктор прошел половину прой-

денного им пути, т. е. $\frac{x}{4}$, а молодой человек — остальное, т. е. $\frac{3x}{4}$. Свою часть пути доктор прошел в $\frac{x}{12}$ часа, а молодой человек — в $\frac{3x}{16}$ часа, причем мы знаем, что он был в пути на $^1/_4$ часа дольше, чем доктор.

Имеем уравнение:

$$\frac{3x}{16} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4},$$

откуда $x = 2{,}4$ километра.

От дома молодого человека до дома доктора — 2,4 километра.

ЗАДАЧА ЛЬВА ТОЛСТОГО

Известный физик А. В. Цингер в своих воспоминаниях о Л. Н. Толстом рассказывает о следующей задаче сообщенной ему писателем на 70-м году жизни.

„Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца; вторая же половина косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, скошенный на другой день одним косцом за один день работы.

Сколько косцов было в артели?“

Решение

В этом случае, кроме главного неизвестного — числа косцов, которое мы обозначим через x, — приходится ввести еще и вспомогательное неизвестное, именно — размер участка, скашиваемого одним косцом в 1 день; обозначим его через y. Хотя задача и не требует его определения, оно облегчит нам нахождение главного неизвестного.

Выразим через x и y площадь большего луга. Луг этот косили полдня x косцов; они скосили $x \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{2}$. Вторую половину дня его косила только половина артели, т. е. $\frac{x}{2}$ косцов; они скосили $\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}$.

Так как к вечеру скошен был весь луг, то площадь его равна

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}.$$

Выразим теперь через x и y площадь меньшего луга. Его полдня косило $\frac{x}{2}$ косцов; они сработали площадь $\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = \frac{xy}{4}$. Прибавим недокошенный участок, как раз равный y (площади, скашиваемой одним косцом в 1 рабочий день), и получим площадь меньшего луга:

$$\frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}.$$

Остается перевести на язык алгебры фразу: „первый луг вдвое больше второго", — и уравнение составлено:

$$\frac{3xy}{4} : \frac{xy + 4y}{4} = 2, \text{ или } \frac{3xy}{xy + 4y} = 2.$$

Сократим дробь в левой части уравнения на y; вспомогательное неизвестное исключено, и уравнение примет вид

$$\frac{3x}{x + 4} = 2, \text{ или } 3x = 2x + 8,$$

откуда $x = 8$.

В артели было 8 косцов.

КОРОВЫ НА ЛУГУ

„При изучении наук задачи полезнее правил", — писал Ньютон в своей „Универсальной арифметике" и сопровождал теоретические указания рядом примеров. В числе этих упражнений мы находим задачу о быках, пасущихся

на лугу, — родоначальницу особого типа своеобразных задач, наподобие следующей:

„Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее в 24 дня, а 30 коров — в 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву луга в 96 дней?

Задача эта в одном английском журнале послужила сюжетом для юмористического рассказа, напоминающего Чеховского „Репетитора“: двое взрослых, родственники школьника, которому эту задачу задали для решения, безуспешно трудятся над нею и недоумевают:

— Выходит что-то странное, — говорит один из решающих: — если в 24 дня 70 коров поедают всю траву луга, то сколько коров съедят ее в 96 дней? Конечно, $^1/_4$ от 70, т. е. $17^1/_2$ коров... Первая нелепость! А вот вторая: 30 коров поедают траву в 60 дней; сколько коров съедят ее в 96 дней? Получается еще хуже: $18^3/_4$ коровы. Кроме того: если 70 коров поедают траву в 24 дня, то 30 коров употребляют на это 56 дней, а вовсе не 60, как утверждает задача.

— А приняли вы в расчет, что трава все время растет? — спрашивает другой.

Замечание резонное: трава непрерывно растет, и если этого не учитывать, то не только нельзя решить задачи, но и само условие ее будет казаться противоречивым.

Как же решается задача?

Решение

Введем и здесь вспомогательное неизвестное, которое будет обозначать суточный прирост травы в долях ее запаса на лугу. В одни сутки прирастает y, в 24 дня — $24y$; если общий запас выразить через 1, то в течение 24 дней коровы съедают

$$1 + 24y.$$

В сутки все стадо (из 70 коров) съедает

$$\frac{1+24y}{24},$$

а одна корова съедает в сутки

$$\frac{1+24y}{24.70}.$$

Подобным же образом из того, что 30 коров поели бы траву того же луга в 60 суток, выводим, что 1 корова съедает в одни сутки

$$\frac{1+60y}{30.60}.$$

Но количество травы, съедаемое коровой в сутки, для обоих стад одинаково. Поэтому

$$\frac{1+24y}{24.70}=\frac{1+60y}{30.60},$$

откуда

$$y=\frac{1}{480}.$$

Найдя y (величину прироста), легко уже определить, какую долю первоначального запаса травы съедает одна корова в сутки:

$$\frac{1+24y}{24.70}=\frac{1+24.\frac{1}{480}}{24.70}=\frac{1}{1600}.$$

Наконец, составляем уравнение для окончательного решения задачи: если искомое число коров x, то

$$\frac{1+96.\frac{1}{480}}{96x}=\frac{1}{1600},$$

откуда $x=20$.

20 коров поели бы всю траву в 96 дней.

ЗАДАЧА НЬЮТОНА

Приведем теперь подлинную Ньютонову задачу о быках, по образцу которой составлена сейчас рассмотренная.

Впрочем, задача не придумана самим Ньютоном; это продукт народного математического творчества, как и сообщенная ранее задача Льва Толстого.

„Три луга, покрытые травой одинаковой густоты и скорости роста, имеют площади: $3\,^1/_3$ гектара, 10 гектаров и 24 гектара. Первый прокормил 12 быков в продолжение 4 недель; второй — 21 быка в течение 9 недель. Сколько быков может прокормить третий луг в течение 18 недель?"

Решение

Введем вспомогательное неизвестное y, означающее, какая доля первоначального запаса травы прирастает на 1 гектаре в течение недели. На первом лугу в течение недели прирастает травы $3\,^1/_3 y$, а в течение 4 недель $3\,^1/_3 y \times 4 = \frac{40}{3} y$ того запаса, который первоначально на нем имелся. Это равносильно тому, как если бы первоначальная площадь луга увеличилась и сделалась равной

$$3\,^1/_3 + \frac{40}{3} y \text{ гектаров.}$$

Другими словами, быки съели столько травы, сколько покрывает луг площадью в $3\frac{1}{3} + \frac{40}{3} y$ гектаров. В одну неделю 12 быков поели $^1/_4$ этого количества, а 1 бык в неделю — $^1/_{48}$, т. е. запас, растущий на площади

$$\left(3\frac{1}{3} + \frac{40y}{3}\right) : 48 = \frac{10 + 40y}{144} \text{ гектаров.}$$

Подобным же образом находим площадь луга, кормящего 1 быка в течение недели, из данных для второго луга:

$$\text{недельный прирост на 1 га} = y$$
$$\text{9-недельн. прирост на 1 га} = 9y$$
$$\text{9-недельн. прирост на 10 га} = 90y.$$

Площадь участка, содержащего запас травы для прокормления 21 быка в течение 9 недель, равна

$$10 + 90y.$$

Площадь, достаточная для прокормления 1 быка в течение 1 недели,—

$$\frac{10 + 90y}{9 . 21} = \frac{10 + 90y}{189} \text{ гектаров.}$$

Обе нормы прокормления должны быть одинаковы:

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 90y}{189}.$$

Решив это уравнение, находим $y = 1/12$.

Определяем теперь площадь луга, наличный запас травы которой достаточен для прокормления одного быка в течение недели:

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 40 . \frac{1}{12}}{144} = \frac{5}{54} \text{ гектара.}$$

Наконец, приступаем к вопросу задачи. Обозначив искомое число быков через x, имеем

$$\frac{24 + 24 . 18 . \frac{1}{12}}{18x} = \frac{5}{54},$$

откуда $x = 36$. Третий луг может прокормить в течение 18 недель 36 быков.

СЕМЕРО ИГРОКОВ

Семь игроков условились, что каждый проигравший платит каждому из остальных шести партнеров столько денег, сколько у того имеется, — другими словами, удваивает его деньги.

Сыграли 7 партий. Проиграли все — каждый по разу По окончании игры подсчитали, сколько у каждого денег. Оказалось у всех поровну — 12 р. 80 к.

Сколько у каждого было денег до начала игры?

Решение

Несмотря на кажущуюся сложность, задача решается довольно просто, если сообразить, что во время игры общая сумма денег у всех игроков оставалась неизменной: деньги только переходили из кармана одного в карман другого. Отсюда следует, что до начала игры общее количество денег было то же, что и к концу, т. е. равнялось $7 \times 12{,}8$ рублей.

Проследим за тем, как во время игры менялось количество денег игрока, проигравшего первым.

До начала игры у него было x рублей.

После первой партии он, проиграв, уплатил шестерым партнерам столько, сколько у всех их имелось, т. е. $7 \times 12{,}8 - x$. Осталось у него после первой партии

$$x - (7 \times 12{,}8 - x) = 2x - 7 \times 12{,}8.$$

После второй партии деньги его удвоились и значит, стали равны

$$2\ (2x - 7 \times 12{,}8).$$

После третьей партии деньги его снова удвоились и составляли

$$2^2\ (2x - 7 \times 12{,}8).$$

После четвертой партии у него оказалось

$$2^3\ (2x - 7 \times 12{,}8).$$

После 7-й партии, т. е. по окончании игры, у него было 12,8 р.; следовательно,

$$2^6\ (2x - 7 \times 12{,}8) = 12{,}8.$$

Решаем это уравнение

$$64\,(2x - 7\times 12{,}8) = 12{,}8$$
$$2x - 7\times 12{,}8 = 0{,}2$$
$$2x - 89{,}6 \text{ и } x = 44{,}8.$$

Итак, до начала игры первый игрок имел 44 р. 80 к.

Таким же образом определим и деньги игрока, проигравшего вторым. До начала игры у него было y.

После первой партии у него стало $2y$.

Вторую партию он проиграл и выплатил $7\times 12{,}8 - 2y$; осталось у него $2y - (7\times 12{,}8 - 2y) = 4y - 7\times 12{,}8$.

После третьей партии у него было

$$2\,(4y - 7\times 12{,}8).$$

После четвертой:

$$2^2\,(4y - 7\times 12{,}8).$$

После седьмой

$$2^5\,(4y - 7\times 12{,}8).$$

Имеем уравнение

$$2^5\,(4y - 7\times 12{,}8) = 12{,}8,$$

откуда $y = 22$ р. 50 к.

Подобным же образом находим деньги третьего игрока — 11 р. 30 к.

Предоставляем читателю самостоятельно определить деньги остальных игроков. Проверкой решения будет то, что сумма денег всех игроков до и после игры должна быть одна и та же.

ЧИСЛЕННОСТЬ ПЛЕМЕНИ

Племя в мужской своей части состоит из прадеда, 3 дедов, 12 внуков и некоторого числа правнуков. Отцов в 10 раз меньше, нежели сыновей. Какова общая численность мужчин в племени?

Решение

Задача окажется весьма простой, если сообразить, что человек может быть одновременно и отцом и сыном. Имея это в виду, мы поймем, что число всех отцов в племени равно

$$1+3+12.$$

Число же всех сыновей (если правнуков x) выразится так:

$$3+12+x.$$

Первых, мы знаем, в 10 раз меньше, чем вторых. Имеем уравнение:

$$10\,(1+3+12)=3+12+x,$$

$$160=x+15,$$

откуда $x=145$. Общая численность мужчин в племени

$$145+12+3+1=161.$$

МНИМАЯ НЕЛЕПОСТЬ

Вот задача, которая может показаться совершенно абсурдной:

Чему равно 84, когда $8\times8=54$?

Между тем, этот странный вопрос далеко не лишен смысла, и задача может быть решена помощью уравнений.

Попробуйте расшифровать ее.

Решение

Вы догадались, вероятно, что числа, входящие в задачу, написаны не по десятичной системе, — иначе вопрос „чему равно 84" был бы нелеп. Пусть основание неизвестной системы счисления есть x. Число „84" означает тогда 8 единиц второго разряда и 4 единицы первого, т. е.

$$„84"=8x+4.$$

Число „54" означает $5x+4$.

Имеем уравнение:

$$8\times 8=5x+4,$$

т. е. в десятичной системе —

$$64=5x+4,$$

откуда $x=12$. Числа написаны по двенадцатиричной системе, и „84" $=8.12+4=100$.

Значит „84" $=100$, когда $8\times 8=$ „54".

Подобным же образом решается задача:

Чему равно 100, когда $5\times 6=33$.

Ответ: 81 (девятиричная система счисления).

УРАВНЕНИЕ ДУМАЕТ ЗА НАС

Если вы сомневаетесь в том, что уравнение бывает иной раз предусмотрительнее нас самих, решите следующую задачу:

Отцу 32 года, сыну 5 лет. Через сколько лет отец будет в 10 раз старше сына?

Обозначим искомый срок через x. Спустя x лет, отцу будет $32+x$ лет, сыну $5+x$. И так как отец должен тогда быть в 10 раз старше сына, то имеем уравнение:

$$(32+x)=10(5+x).$$

Решив его, получаем $x=-2$.

„Через минус 2 года" означает: „два года назад". Когда мы составляли уравнение, мы не сообразили, что возраст отца никогда в будущем не окажется в 10 раз превосходящим возраст сына, но что такое соотношение могло быть только в прошлом. Уравнение оказалось вдумчивее нас и напомнило нам о сделанном упущении.

КУРЬЕЗЫ И НЕОЖИДАННОСТИ

При решении уравнений мы наталкиваемся иногда на ответы, которые могут поставить втупик малоопытного математика. Приведем несколько примеров.

I. Решить систему

$$3x + y = 12$$
$$x = 5 - \frac{y}{3}.$$

Подставив в первое уравнение значение x из второго, имеем:

$$3\left(5 - \frac{y}{3}\right) + y = 12,$$

а после преобразований:

$$15 = 12.$$

Мы не определили значений ни x, ни y, зато узнали, что $15 = 12$... Что это значит?

Это означает лишь, что чисел, удовлетворяющих данным уравнениям, не существует (по крайней мере, конечных чисел), и что эти уравнения противоречат одно другому. В самом деле: умножив второе уравнение на 3 и перенеся y в левую часть, получим

$$3x + y = 15$$

Одна и та же величина $(3x + y)$ согласно первому уравнению равна 12, согласно же второму — 15. Это возможно было бы лишь, если $12 = 15$, т. е. безусловно невозможно.

Подобное же недоразумение ожидает решающего следующую систему уравнений, заимствуемую мною из тестов Эдисона. [1]

---

[1] Незадолго до смерти знаменитый американский изобретатель пожелал поощрить денежной помощью (стипендией) самого сметливого юношу США. По его приглашению, с разных концов республики были направлены к нему наиболее одаренные школьники, по одному от каждого штата, и великий изобретатель во главе целой комиссии (куда входили, между прочим, „автомобильный король" Форд и знаменитый летчик Линдберг) подверг их испытанию, чтобы выделить „лучшего из лучших". Каждый юноша должен был ответить на 40 вопросов самого разнообразного характера.

$$\begin{cases} x^2 y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получаем

$$xy = 2,$$

а сопоставляя сейчас полученное уравнение со вторым, видим, что

$$\begin{cases} xy = 4 \\ xy = 2 \end{cases}$$

т. е. $4 = 2$. Чисел, удовлетворяющих этой системе, не существует. (Системы, которые, подобно сейчас рассмотренным, не имеют общих решений, называются несовместными.)

II. Решить задачу:

Разность цифр двузначного числа 3. Если к этому числу прибавить 27, то получится число, отличающееся от искомого только порядком цифр. Что это за число?

Составляем уравнение. Если цифру десятков обозначим через x, то число единиц выразится через $x+3$. Переводя задачу на язык алгебры, получим:

$$10\,x + (x+3) + 27 = 10\,(x+3) + x.$$

Сделав упрощения, приходим к равенству:

$$0 = 0.$$

Это равенство неоспоримо верно, но оно ничего не говорит нам о значении x. Значит ли это, что чисел, удовлетворяющих требованию задачи, не существует?

Напротив, это означает, что составленное нами уравнение есть тождество, т. е. справедливо при любом значении неизвестного x. Действительно, легко убедиться, что указанным в задаче свойством обладает каждое двузначное число с разностью цифр 3:

$$14 + 27 = 41 \qquad 47 + 27 = 74$$
$$25 + 27 = 52 \qquad 58 + 27 = 85$$
$$36 + 27 = 63 \qquad 69 + 27 = 96$$

III. Найти трехзначное число, обладающее следующими свойствами:

1) цифра десятков 7;

2) цифра сотен на 4 меньше цифры единиц;

3) если цифры этого числа разместить в обратном порядке, то новое число будет на 396 больше искомого.

Составим уравнение, обозначив цифру сотен через x:

$$100x + 70 + x - 4 - [100(x-4) + 70 + x] = 396.$$

Уравнение это после упрощений приводит к равенству

$$0 = 0.$$

Читатель уже знает, как надо толковать подобный результат. Это означает, что каждое трехзначное число, в котором первая цифра на 4 меньше третьей, увеличивается на 396, если цифры поставить в обратном порядке.

До сих пор мы рассматривали задачи, имеющие более или менее искусственный, книжный характер; их назначение — помочь приобрести навык в составлении и решении уравнений. Теперь, вооруженные теоретически, займемся несколькими примерами практических задач из области производства, обихода, военного дела, спорта.

В ПАРИКМАХЕРСКОЙ

Может ли алгебра понадобиться в парикмахерской? Оказывается, что такие случаи бывают. Мне пришлось убедиться в этом, когда в парикмахерской подошел ко мне однажды мастер с неожиданной просьбой:

— Не поможете ли нам разрешить задачу, с которой мы здесь никак не справимся?

— Уж сколько раствора испортили из-за этого! — добавил другой.

— В чем задача? — осведомился я.

— У нас имеется два раствора перекиси водорода, 30-процентный и 3-процентный. Нужно их смешать так, чтобы составился 12-процентный раствор. Не можем подыскать правильной пропорции...

Мне подали бумажку, и требуемая пропорция была отыскана.

Она оказалась очень простой. Какой именно?

Решение

Задачу можно решить и арифметически, но язык алгебры приводит здесь к цели проще и быстрее. Пусть для составления 12-процентной смеси требуется взять x граммов 3-процентного раствора и y граммов 30-процентного. В первой порции берется тогда 0,03 x граммов чистой перекиси водорода, во второй 0,3 y, а всего

$$0{,}03\,x + 0{,}3\,y.$$

При этом получается $x + y$ граммов раствора, в котором чистой перекиси 0,12 $(x + y)$. Имеем уравнение.

$$0{,}03\,x + 0{,}3\,y = 0{,}12\,(x + y).$$

Умножив все члены уравнения на 100 и раскрыв скобки, получаем

$$3\,x + 30\,y = 12\,x + 12\,y,$$

откуда

$$18\,y = 9\,x, \text{ и } \frac{x}{y} = 2.$$

Значит, надо 3-процентного раствора взять вдвое больше, чем 30-процентного.

Проверим. Возьмем 2 литра 3-процентного раствора и 1 литр 30-процентного. Чистой перекиси мы будем тогда иметь

$$0{,}03 \cdot 2000 + 0{,}3 \cdot 1000 = 60 + 300 = 360 \text{ куб. см.}$$

В 3 литрах (3000 куб. см) смеси окажется 360 куб. см перекиси; процентное содержание ее составляет

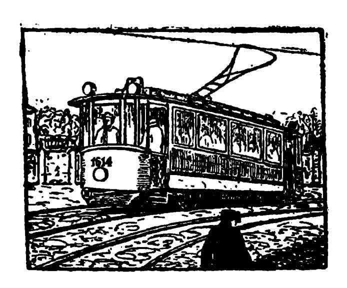
$$\frac{360}{3000} \cdot 100 = 12\%,$$

как и требовалось.

Мы имеем здесь пример, когда посредством уравнения решается вопрос, относящийся не к „числам“, а к „отвлеченным отношениям величин“, которые имел в виду Ньютон (стр. 46).

ТРАМВАЙ И ПЕШЕХОД

Идя вдоль трамвайного пути, я заметил, что каждые 12 минут меня нагоняет трамвайный вагон, а каждые 4 минуты я встречаю трамвайный вагон. И я, и трамвай движемся с равномерной скоростью.



Через сколько минут один после другого трамвайные вагоны покидают свои конечные пункты?

Решение

Если вагоны покидают свои конечные пункты каждые x минут, а минутная скорость вагона y метров, то промежутки между вагонами равны xy метров. Обозначим минутную скорость пешехода через z. В момент встречи с вагоном пешеход отделен от ближайшего вагона впереди и позади на xy. Имеем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 4y + 4z = xy \\ 12y - 12z = xy \end{cases}$$

из которой заключаем, что

$$4y+4z=12y-12z$$

и следовательно:

$$y=2z$$

Подставив значение y в первое уравнение, получаем

$$8z+4z=2zx$$

Так как z не равно нулю, то можем разделить все члены уравнения на z:

$$8+4=2x,$$

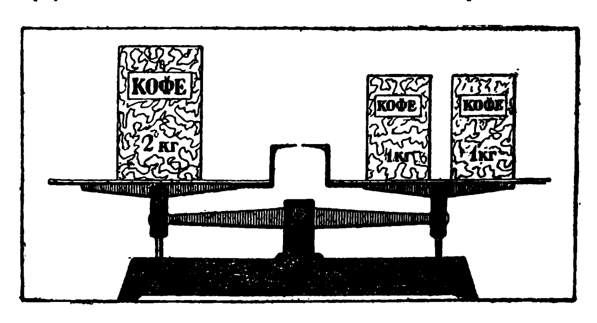
откуда

$$x=6.$$

Вагоны отходят каждые 6 минут.

ДВЕ ЖЕСТЯНКИ КОФЕ

Две жестянки, наполненные кофе, имеют одинаковую форму и сделаны из одинаковой жести. Первая весит



2 кило и имеет в высоту 12 см; вторая весит 1 кило и имеет в высоту 9,5 см. Каков чистый вес кофе в жестянках?

Решение

Обозначим содержимое большей жестянки через x, меньшей — через y. Вес самих жестянок обозначим соответственно через z и t. Имеем уравнения:

$$x + z = 2$$
$$y + t = 1$$

Так как веса содержимого полных жестянок относятся как их объемы, то-есть как кубы их высот, то

$$\frac{x}{y} = \frac{12^3}{9{,}5^3} = 2{,}02, \text{ или } x = 2{,}02\, y.$$

Веса же пустых жестянок относятся, как их полные поверхности, т. е. как квадраты их высот. Поэтому

$$\frac{z}{t} = \frac{12^2}{9{,}5^2} = 1{,}69, \text{ или } z = 1{,}69\, t.$$

Подставив значения x и y в первое уравнение, получаем систему

$$\begin{cases} 2{,}02\, y + 1{,}69\, t = 2 \\ y + t = 1 \end{cases}$$

Решив ее, узнаем:

$$y = \frac{31}{33} = 0{,}94; \quad t = 0{,}06.$$

И следовательно,

$$x = 1{,}9; \qquad z = 0{,}1.$$

Вес кофе без упаковки: в большей жестянке 1,9 кило, в меньшей — 0,94 кило.

НА ПУТИ К ЗАВОДУ

Двое рабочих, живущих вместе и работающих на одном заводе, вышли из дому на свой завод, один 5 минутами раньше другого. Тот, который вышел раньше, обычно проходит путь от дома до завода в 30 минут. Его более молодой сожитель проходит то же расстояние в 20 минут. Через сколько времени он догонит старшего товарища?

Решение

Рабочий, делающий весь путь в 30 минут, проходит ежеминутно 1/30 пути; его товарищ — 1/20. Если встреча произойдет через x минут после выхода второго, то первый в течение $5 + x$ минут пройдет долю

$$\frac{5+x}{30} \text{ всего пути;}$$

второй —

$$\frac{x}{20}.$$

Так как оба пройдут от дома до места встречи один и тот же путь, то

$$\frac{5+x}{30} = \frac{x}{20}$$

откуда $x = 10$. Младший рабочий нагонит старшего через 10 минут после выхода из дому.

ВЕЧЕРИНКА

На вечеринке было 42 танцующих. Мария танцовала с семью танцорами, Ольга — с восемью, Вера — с девятью и так далее до Нины, которая танцовала со всеми танцорами. Сколько танцоров было на вечеринке?

Решение

Задача решается очень просто, если удачно выбрать неизвестное. Будем искать число не танцоров, а танцорок, которое обозначим через x:

1-я, Мария, танцовала	с	$6+1$	танцорами
2-я, Ольга,	„	$6+2$	„
3-я, Вера,	„	$6+3$	„
x-я, Нина,	„	$6+x$	

Имеем уравнение

$$x + (6 + x) = 42,$$

откуда

$$x = 18,$$

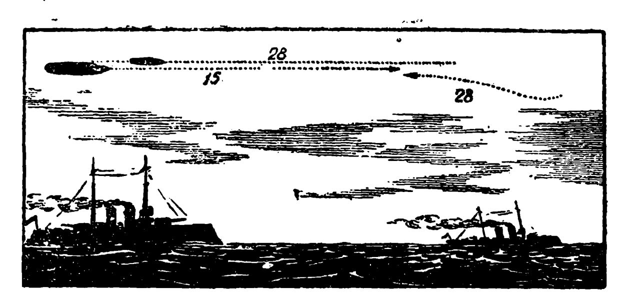
а следовательно число танцоров —

$$42 - 18 = 24.$$

МОРСКАЯ РАЗВЕДКА

I

Разведчику (разведывательному кораблю), имеющему скорость 28 узлов (миль в час), дано задание осветить (обследовать) район моря по курсу эскадры (в направле-



нии ее движения) в расстоянии 70 миль. Скорость эскадры 15 миль (в час). Требуется определить, через сколько времени разведчик возвратится к эскадре. [1]

Решение

Обозначим искомое число часов через x. За это время эскадра успела пройти $15x$ миль, разведывательный же

[1] „Из заметок по тактической навигации" К. А. Мигаловского, 1926.

корабль $28x$. Последнее судно прошло вперед 70 миль и часть этого пути обратно; эскадра же прошла остальную часть того же пути. Вместе они прошли путь в $28x + 15x$, равный 2×70. Имеем уравнение

$$28x + 15x = 140,$$

откуда

$$x = \frac{140}{43} = 3 \text{ ч. } 15 \text{ м.}$$

Разведчик возвратится к эскадре через 3 ч. 15 м.

Разведывательное судно получило приказ произвести разведку впереди эскадры по направлению ее движения. Через 3 часа судно это должно вернуться к эскадре. Спустя сколько времени после оставления эскадры разведывательное судно должно повернуть назад, если скорость его 25 узлов, а эскадры 15 узлов?

Решение

Пусть разведчик должен повернуть спустя x часов; значит, он удалялся от эскадры x часов, а шел навстречу ей $(3 - x)$ часов. Пока все корабли шли в одном направлении, разведчик успел за x часов удалиться от эскадры на разность пройденных ими путей, т. е. на

$$25x - 15x = 10x.$$

При возвращении разведчика он прошел путь навстречу эскадре $25\,(3 - x)$, сама же эскадра прошла $15\,(3 - x)$. Тот и другой прошли вместе $10x$. Следовательно,

$$25\,(3 - x) + 15\,(3 - x) = 10x,$$

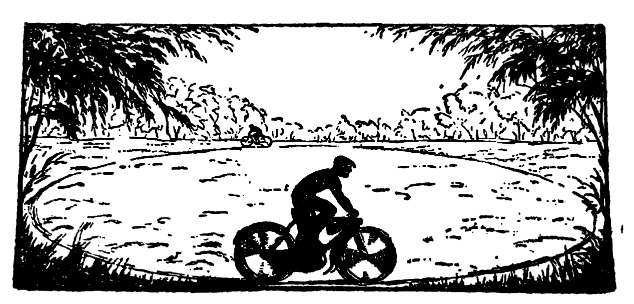
откуда

$$x = 1^2/_5.$$

Разведчик должен изменить курс на обратный спустя 1 ч. 24 м после того, как он покинул эскадру.

НА ВЕЛОДРОМЕ

По круговой дороге велодрома едут два велосипедиста с неизменными скоростями. Когда они едут в противоположных направлениях, то встречаются каждые 10 секунд; едучи же в одном направлении, они настигают друг



друга каждые 170 секунд. Какова скорость каждого велосипедиста, если длина круговой дороги 170 метров?

Решение

Когда велосипедисты едут в *противоположные* стороны, они ежесекундно сближаются на сумму их скоростей, — на $x+y$. Между двумя встречами должно проходить поэтому число секунд, равное

$$\frac{170}{x+y}=10.$$

Едучи в *одном* направлении, они ежесекундно сближаются на $x-y$, и между встречами должно проходить число секунд, равное

$$\frac{170}{x-y}=170.$$

После упрощения этих уравнений, получаем:

$$x+y=17 \qquad x-y=1.$$

Откуда

$x=9$ метров, $y=8$ метров.

СОСТЯЗАНИЕ АВТОМОБИЛЕЙ

При автомобильных состязаниях одна из трех стартовавших одновременно машин, делавшая в час на 15 километров меньше первой и на 3 километра больше третьей, пришла к конечному пункту на 12 минут позже первой и на 3 минуты раньше третьей. Остановок в пути не было.

Требуется определить:

а) Как велик участок пути?

b) Как велика скорость каждой машины?

с) Какова продолжительность пробега каждой машины?

Решение

Хотя требуется определить 7 неизвестных величин, мы обойдемся при решении задачи только двумя: составим систему двух уравнений с двумя неизвестными.

Обозначим скорость второй машины через x. Тогда скорость первой выразится через $x+15$, а третьей — через $x-3$.

Длину участка обозначим буквой y. Тогда продолжительность пробега обозначится

для первой машины через $\frac{y}{x+15}$

для второй $\frac{y}{x}$

для третьей $\frac{y}{x-3}$

Мы знаем, что вторая машина была в пути на 12 минут (т. е. на $^1/_5$ часа) дольше первой. Поэтому

$$\frac{y}{x}-\frac{y}{x+15}=\frac{1}{5}.$$

Третья машина была в пути на 3 минуты (т. е. на $^1/_{20}$ часа) больше второй. Следовательно,

$$\frac{y}{x-3}-\frac{y}{x}=\frac{1}{20}.$$

Первое уравнение преобразуем:

$$5y\ (x+15)-5xy=x\ (x+15)$$
$$5xy+75y-5xy=x\ (x+15)$$
$$75y=x\ (x+15).$$

Второе уравнение также преобразуем:

$$20xy-20y\ (x-3)=x\ (x-3)$$
$$20xy-20xy+60y=x\ (x-3)$$
$$60y=x\ (x-3).$$

Имеем систему

$$\begin{cases} 75y=x\ (x+15) \\ 60y=x\ (x-3). \end{cases}$$

Первое уравнение делим на второе, сокращая при этом на x и y (обе величины, мы знаем, не равны нулю). Получаем уравнение:

$$\frac{5}{4}=\frac{x+15}{x-3},$$

или

$$5x-15=4x+60,$$

откуда

$$x=75.$$

Зная x, находим y из уравнения

$$60y=x\ (x-3)=75.72$$
$$y=90.$$

Итак, скорости машин определены:

90 км, 75 км, 72 км.

Длина всего пути $=90$ км.

Продолжительность пробегов:

первой машины $\frac{90}{90}=1$ час.

второй машины $\frac{90}{75} = 1$ ч. 12 м.

третьей $\frac{90}{72} = 1$ „ 15 „

Таким образом все 7 неизвестных величин задачи определены.

МАШИНЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Беседа об уравнениях в плане „Занимательной алгебры" не может пройти мимо машин, решающих уравнения (при том весьма трудные) автоматическим путем Это не утопия, как „литературная" или „мыслительная" машины, рассмотренные в первой главе, и не миф, существующий лишь в умах легковерных людей, как мнимые шахматные автоматы. [1] Машины для решения уравнений существуют на самом деле и автоматически находят корни таких трудных уравнений, как

$$x^9 + ax^8 + b = 0$$
$$x^9 + ax^7 + b = 0$$
$$x^5 + ax^4 + bx^3 + c = 0.$$

Наш академик А. Н. Крылов изобрел математическую машину, еще более удивительную: она справляется с уравнениями высшей математики (интегрирует дифференциальные уравнения).

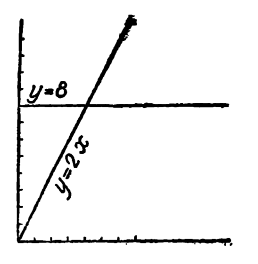
Понять идею устройства подобных машин нетрудно, если вспомнить, как решаются графически хотя бы уравнения первой степени. Возьмем для примера уравнение $2x - 8 = 0$.

Мы можем заменить его такой несложной „системой":

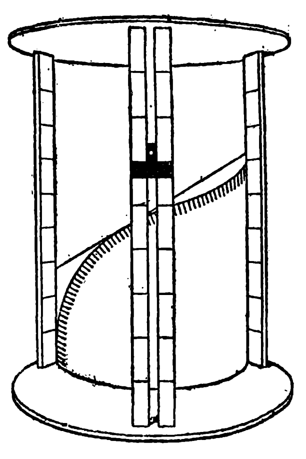
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y = 8 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 2x \\ y = 8. \end{cases}$$

[1] Прославившиеся в истории шахматные автоматы были тонким плутовством: они приводились в действие искусно спрятанным внутри них игроком.

Уравнения $y=2x$ и $y=8$ можно рассматривать как уравнения двух прямых линий; абсцисса точки их пересечения и будет искомое x.



Легко представить себе механический прибор, осуществляющий этот метод решения уравнений первой степени. Корни уравнения второй степени могут быть разысканы механическим прибором, осуществляющим пересечение параболы и прямой линии. Практически в этих случаях скорее и проще, конечно, находить корни вычислением, и потому подобные приборы могли бы иметь разве лишь дидактическое значение. Иное дело уравнения более высоких степеней, вычисление корней которых представляет долгую и утомительную работу; здесь создание механического прибора вполне оправдывается практической потребностью.



На рисунке изображена машина для решения четырехчленных уравнений вида:

$$x^p + ax^m + bx^n + c = 0$$

3-й, 4-й и 5-й степеней. Объяснять подробности устройства этой машины было бы здесь неуместно; укажу только, что корень отыскивается в ней путем пересечения пространственной кривой с плоскостью. Никаких зубчаток, никаких сложных передач в этой „машине“ нет так что лучше, пожалуй, называть ее не машиной, а прибором или аппаратом. В ней три отвесных масштабных стойки, по одной из которых скользит диоптр (просверленная пластинка). Пространственная кривая (шкала x) нанесена на особом цилиндре. На делениях стоек отмечают коэффициенты a, b, c, причем две из этих пометок соединяются ниткой, а через диоптр третьей стойки замечают пометки тех точек кривой, которые отвечают местам ее пересечения с ниткой. Прибор этот изобретен профессором Мемке в Штуттгарте.



ГЛАВА ТРЕТЬЯ

В ПОМОЩЬ АРИФМЕТИКЕ

Арифметика зачастую не в силах собственными средствами строго доказать правильность иных из ее утверждений. Ей приходится в таких случаях прибегать к обобщающим приемам алгебры. К таким арифметическим положениям, обосновываемым алгебраически, принадлежат, например, многие правила сокращенного выполнения действий, любопытные особенности некоторых чисел, признаки делимости и др. Рассмотрению подобных вопросов и посвящается настоящая глава.

МГНОВЕННОЕ УМНОЖЕНИЕ

Подвизающийся сейчас в Германии замечательный счетчик-виртуоз д-р Фред Браунс, затмивший славу своих предшественников и побивший все их рекорды, во многих случаях облегчает себе вычислительную работу, пользуясь несложными алгебраическими преобразованиями. Например,

$$988^2$$

он выполняет так:

$$988 \times 988 = (988 + 12) \cdot (988 - 12) + 12^2 =$$
$$= 1\,000 \times 976 + 144 = 976\,144.$$

Легко сообразить, что счетчик в этом случае пользуется следующим алгебраическим преобразованием;

$$(a+b)\ (a-b)+b^2=a^2-b^2+b^2=a^2.$$

Далее, умножение 986×997 выполняется Браунсом так:

$$986\times997=(986-3)\times1\,000+3\times14=983\,042.$$

На чем основан этот прием? Представим множители в виде:

$$(1\,000-14)\cdot(1\,000-3)$$

и перемножим эти двучлены по правилам алгебры:

$$1\,000\times1\,000-1\,000\times14-1\,000\times3+14\times3.$$

Делаем преобразования:

$$1\,000\ (1\,000-14)-1\,000\times3+14\times3$$
$$1\,000\times986-1\,000\times3+14\times3$$
$$1\,000\ (986-3)+14\times3.$$

Последняя строка и изображает прием немецкого счетчика.

Интересен применяемый им способ перемножения двух трехзначных чисел, у которых число десятков одинаково, а цифры единиц составляют в сумме 10. Например, умножение

$$783\times787$$

д-р Браунс выполняет так:

$$78\times79=6\,162;\ 3\times7=21.$$

Результат 616221.

Основание этого способа ясно из следующих преобразований:

$$(780+3)\ (780+7)=$$
$$780\times780+780\times3+780\times7+3\times7=$$
$$=780\times780+780\times10+3\times7=$$
$$=780\ (780+10)+3\times7=780\times790+21=$$
$$=616\,200+21.$$

Другой прием для выполнения подобных умножений, также практикуемый немецким виртуозом, проще:

$$783 \times 787 = (785-2)\ (785+2) = 785^2 - 4 =$$
$$= 616\,225 - 4 = 616\,221.$$

На практике мы можем с успехом пользоваться для устных выкладок формулой:

$$a^2 = (a+b)\ (a-b) + b^2$$

Например:

$$27^2 = (27+3)\ (27-3) + 3^2 = 729$$
$$63^2 = 66 \cdot 60 + 3^2 = 3\,969$$
$$18^2 = 20 \cdot 16 + 2^2 = 324$$
$$37^2 = 40\ \ 34 + 7^2 = 1\,369$$
$$48^2 = 50\ \ 46 + 2^2 = 2\,304$$
$$54^2 = 58 \cdot 50 + 4^2 = 2\,916.$$

Очень удобен также следующий способ быстрого возвышения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5.

35^2; $3 \cdot 4 = 12$; Отв. 1 225.
65^2; $6 \cdot 7 = 42$; Отв. 4 225.
75^2; $7 \cdot 8 = 56$; Отв. 5 625.

Правило состоит в том, что умножают число десятков на ближайшее высшее число и к произведению приписывают 25.

Прием основан на следующем. Если число десятков a, то все число можно изобразить так

$$10a + 5.$$

Квадрат этого числа, как квадрат двучлена, равен

$$100a^2 + 100a + 25 = 100a\ (a+1) + 25.$$

Выражение $a\ (a+1)$ есть произведение числа десятков на ближайшее высшее число. Умножить число на 100 и прибавить 25 все равно, что приписать числу 25.

Прием этот годен лишь для чисел, оканчивающихся на 5. Но так как большинство людей склонно округлять конец числа до 5, то надобность в возвышении в квадрат подобных чисел возникает чаще, чем для прочих.

Из того же приема вытекает простой способ возвышать в квадрат числа, состоящие из целой части и $^1/_2$. Например:

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 3{,}5^2 = 12{,}25 = 12\frac{1}{4}$$
$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2 = 56\frac{1}{4}$$
$$\left(8\frac{1}{2}\right)^2 = 72\frac{1}{4}, \text{ и т. п.}$$

ЦИФРЫ 1, 5 и 6

Вероятно, все заметили, что от перемножения ряда чисел, оканчивающихся единицей или пятеркой, получается число, оканчивающееся тою же цифрой. Менее известно, что сказанное относится и к числу 6. Поэтому, между прочим, всякая степень числа, оканчивающегося на 6, также оканчивается шестеркой.

Например:

$$46^2 = 2116; 46^3 = 97336.$$

Обосновать эту любопытную особенность цифр 1, 5 и 6 можно только алгебраическим путем. Рассмотрим ее для 6-ти.

Числа, оканчивающиеся 6-ю, изображаются так:

$$10a+6,\ 10b+6 \text{ и т. д.}$$

где a и b могут быть любые целые числа.

Произведение двух таких чисел равно

$$100ab + 60b + 60a + 36 =$$
$$= 10\ (10ab + 6b + 6a) + 30 + 6 =$$
$$= 10\ (10ab + 6b + 6a + 3) + 6.$$

Как видим, произведение составляется из некоторого числа десятков и из цифры 6, которая, разумеется, должна оказаться на конце.

Тот же прием доказательства можно применить и к 1 и 5.

Сказанное дает нам право утверждать, что, например,

386^{2567} оканчивается на 6,

815^{723} на 5,

491^{1732} на 1 и т. п.

ЧИСЛА 25 и 76

Есть и двузначные числа, обладающие тем же свойством, как и числа 1, 5 и 6. Это 25 и — что, вероятно, для многих будет неожиданностью, — число 76. Всякие два числа, оканчивающиеся на 76, дают в произведении такое же число.

Докажем это. Общее выражение для подобных чисел

$$100a+76;\ 100b+76 \text{ и т. д.}$$

Перемножим два таких числа; получим

$$10\,000ab+7\,600b+7\,600a+5\,776=10\,000ab+$$
$$+7\,600b+7\,600a+5700+76=$$
$$=100(100ab+76b+76a+57)+76.$$

Положение доказано: произведение будет оканчиваться числом 76.

Отсюда следует, что всякая степень числа, оканчивающаяся на 76, есть подобное же число:

$$376^2=141\,376;\ 576^3=191\,102\,976 \text{ и т. п.}$$

Существуют и более длинные группы цифр, которые, находясь на конце чисел, сохраняются и в их произведении. Примером могут служить числа:

376; 625; 90625.

Например,

$$90\,625^2 = 8\,212\,890\,625.$$

Предоставляем читателю доказать это положение самостоятельно.

ДОПЛАТА

(Старинная народная задача)

Двое продали принадлежавший им гурт волов, получив при этом за каждого вола столько рублей, сколько в гурте было волов. На вырученные деньги купили стадо овец, по 10 рублей за овцу, и одного ягненка. При дележе поровну одному досталась лишняя овца, другой же взял ягненка и получил с компаньона соответствующую доплату. Как велика была доплата?

Решение

Эта своеобразная арифметическая задача не поддается прямому переводу „на алгебраический язык", т. е. для нее нельзя составить уравнения. Приходится решать ее особым путем, — так сказать, по свободному математическому соображению. Но и здесь алгебра оказывает арифметике существенную помощь.

Стоимость всего стада в рублях есть точный квадрат, так как стадо приобретено на деньги от продажи n волов по n рублей за вола. Одному из компаньонов досталась лишняя овца, — следовательно, число овец нечетное; нечетным, значит, является и число десятков в числе n^2. Какова же цифра единиц?

Оказывается, что если в точном квадрате число десятков нечетное, то цифра единиц в нем может быть только 6.

Как это доказать? Весьма просто.

Квадрат всякого числа из a десятков и b единиц, т. е. $(10a+b)^2$ равен

$$100a^2+20ab+b^2=(10a^2+2ab)\cdot 10+b^2.$$

Десятков в этом числе $10a^2+2ab$ да еще некоторое число десятков, заключающихся в b^2. Но $10a^2+2ab$ делится на 2, это число четное. Оно сделается нечетным, если в числе b^2 окажется нечетное число десятков. Вспомним, что такое b^2. Это квадрат цифры единиц, т. е. одно из следующих 10 чисел.

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.$$

Среди них нечетное число десятков имеют только 16 и 36 — оба оканчивающиеся на 6. Значит, точный квадрат

$$100a^2+20ab+b^2$$

может иметь нечетное число десятков только в том случае, если оканчивается на 6.

Теперь легко найти ответ на вопрос задачи. Ясно, что ягненок пошел за 6 рублей. Компаньон, которому он достался, получил, следовательно, на 4 рубля меньше другого. Чтобы уравнять их доли, обладатель ягненка должен дополучить от своего компаньона 2 рубля.

Доплата равна 2 рублям.

ДЕЛИМОСТЬ НА 11

Алгебра весьма облегчает отыскание признаков, по которым можно заранее, не выполняя деления, установить, делится ли данное число на тот или иной делитель. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 — общеизвестны. Выведем признак делимости на 11; мы убедимся что он очень прост и практичен.

Каждое многозначное число N может быть в общем виде представлено так:

$$N = 10^n a + 10^{n-1} b + 10^{n-2} c + \ldots + 10^3 p + $$
$$+ 10^2 u + 10 v + w.$$

Посмотрим, какие остатки получаются от деления отдельных слагаемых этого числа. Начнем с конца:

w — число, меньшее 11, дает в остатке, конечно, само себя, т. е. w

$10v = 11v - v$. Мы можем сказать, что при делении на 11 это слагаемое дает отрицательный остаток: $-v$

$$10^2 u = 100u = 99u + u;\ \text{остаток } u.$$

$10^3 p = 1000p = 1001p - p$. Так как 1001 делится на 11 то остаток равен $-p$.

Легко видеть, что остаток от деления N на 11 должен равняться алгебраической сумме всех этих остатков, т. е.

$$a - b + c - d + e - \ldots - p + u - v + w =$$
$$= (a + c + e + \ldots + u + w) - (b + d + \ldots + p + v).$$

Иными словами: надо из суммы всех цифр, стоящих на четных местах, вычесть сумму всех цифр, занимающих нечетные места; и если в разности получится 0 либо число (положительное или отрицательное) кратное 11, то и испытуемое число кратно 11.

Испытаем, например, число 87 635 064

$$8 + 6 + 5 + 6 = 25$$
$$7 + 3 + 0 + 4 = 14$$
$$25 - 14 = 11,$$

значит данное число делится на 11

ДЕЛИМОСТЬ НА 19

Найти основание следующего признака делимости:

Число делится без остатка на 19, если половина числа его десятков, сложенная с цифрой единиц, кратна 19.

При нечетном числе десятков остаток от их деления на 2 (т. е. 10) прибавляется к единицам.

Решение

Всякое число N_1 можно представить в виде

$$N_1 = 10x + y$$

где x — число десятков (не цифра в разряде десятков, а общее число целых десятков во всем числе), y — цифра единиц. Докажем сначала, что если при x четном (т. е. $x = 2z$) число

$$N_2 = \frac{x}{2} + y = z + y$$

кратно 19, то и $20z + y$ (т. е. N_1) кратно 19. Для этого составим разность $N_1 - N_2 = R$.

$$R = 20x + y - x - y = 19z,$$

откуда

$$N_1 = N_2 + R = 19z + N_2.$$

Ясно, что если N_2 кратно 19, то и N_1 кратно тому же числу. Это мы и хотели доказать.

Рассмотрим теперь случай, когда число десятков x нечетное, т. е. равно $2z + 1$. Докажем, что число N_1 делится без остатка на 19, если число

$$N_3 = \frac{2z}{2} + 10 + y = z + y + 10$$

кратно 19. Составим разность:

$$N_1 - N_3 = 10\,(2z + 1) + y - z - y - 10 = R$$
$$R = 20z + 10 + y - z - y - 10 = 19z.$$

Опять имеем

$$N_1 = 19z + N_3,$$

равенство, подтверждающее правильность указанного признака делимости.

Покажем на примере, как им пользуются. Пусть требуется определить, делится ли на 19 число

47 045 881.

Применяем последовательно наш признак делимости:

$$\frac{4\,704\,588}{2} + 1 = 2\,352\,295$$

$$\frac{235\,228}{2} + 15 = 117\,629$$

$$\frac{11\,762}{2} + 9 = 5\,890$$

$$\frac{588}{2} + 10 = 304$$

$$\frac{30}{2} + 4 = 19$$

Так как 19 делится на 19 без остатка, то кратны 19 и числа

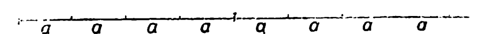
304, 5 890, 117 629, 2 352 295, 47 045 881.

Итак, наше число делится на 19.

Нельзя сказать, чтобы этот признак делимости был очень практичен. Пожалуй, не многим больше времени отняло бы непосредственное испытание данного числа делением его на 19. Однако, лучшего признака делимости на 19 не найдено.

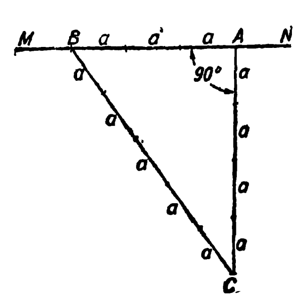
ПИФАГОРОВЫ ЧИСЛА

Удобный и очень точный способ, употребляемый землемерами для проведения на местности перпендику-



лярных линий, состоит в следующем. Пусть через точку A требуется провести к линии MN другую под прямым углом. Откладывают от A по направлению AM три раза какое-нибудь расстояние a. Затем завязывают на

шнуре три узла, расстояния между которым равны $4a$ и $5a$. Приложив крайние узлы к точкам A и B, натягивают шнур за средний узел. Шнур расположится тогда треугольником, в котором угол A прямой.



Этот древний способ, применявшийся еще тысячелетия назад строителями египетских пирамид, основан на том, что каждый треугольник, стороны которого относятся как 3:4:5,— прямоугольный, согласно общеизвестной теореме Пифагора:

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Вместо чисел 3, 4, 5, можно выбрать и другие „Пифагоровы числа", которых существует бесчисленное множество. Например:

$$5^2 + 12^2 = 13^2; \qquad 9^2 + 40^2 = 41^2;$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2; \qquad 57^2 + 176^2 = 185^2 \text{ и т. д.}$$

Рассматривая эти группы, убеждаемся, что в каждой из них есть четное число („четный катет"). Случайность ли это? Или все три „Пифагорова числа" не могут быть нечетными?

Решение

Станем рассуждать „от противного".

Допустим, что все три Пифагоровы числа нечетные:

$$2x + 1; \qquad 2y + 1; \qquad 2z + 1$$

Квадраты их:

$$(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$(2y + 1)^2 = 4y + 4y + 1$$
$$(2z + 1)^2 = 4z^2 + 4z + 1.$$

Сумма любых двух из этих чисел, например $(2x + 1)^2 +$ $+ (2y + 1)^2$ составляет

$$4x^2 + 4x + 1 + 4y_2 + 4y + 1 = 4x_2 + 4y^2 + 4x + 4y + 2,$$

т. е. число четное (кратное 2) и, очевидно, не может равняться нечетному числу $4z^2 + 4z + 1$. Поэтому группы из нечетных Пифагоровых чисел не существует.

Хотя эта задача и соприкасается тесно с геометрией, она все же по существу относится к свойствам чисел и, следовательно, должна быть рассматриваема, как арифметическая.

ТЕОРЕМА СОФИИ ЖЕРМЕН

Вот задача, предложенная известной французской математичкой Жермен:

Доказать, что каждое число вида $a^4 + 4$ есть составное.

Решение

Доказательство вытекает из следующих преобразований:

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 =$$
$$= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 - 2a)\ (a^2 + 2 + 2a).$$

Число $a^4 + 4$ может быть, как мы убеждаемся, представлено в виде произведения двух множителей не равных ему самому и единице; иными словами, оно—составное.

ИЗ ТАЙН ЭРАТОСФЕНОВА РЕШЕТА

Число так называемых простых чисел, т. е. не делящихся без остатка ни на какие другие, кроме единицы и самих себя, — бесконечно велико. Начинаясь числами

1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31

ряд их простирается без конца. Вклиниваясь между числами составными, они разбивают натуральный ряд чисел на более или менее длинные участки составных чисел. Какой длины бывают эти участки? Следует ли подряд, например, тысяча составных чисел, не прерываясь ни одним простым числом?

Можно доказать, — хотя это и кажется неправдоподобным, — что участки составных чисел между простыми бывают любой длины. Нет границы для длины таких участков: они могут состоять из тысячи, из миллиона, из триллиона и т. д. составных чисел.

Мы докажем это, если найдем общее выражение для ряда из n составных чисел, каждое единицей больше предыдущего. Для удобства нам придется в этом случае пользоваться условным обозначением $n!$, которое выражает произведение всех чисел от 1 до n включительно. Например $5! = 1.2.3.4.5$. Мы сейчас докажем, что ряд из n последовательных составных чисел имеет такой вид:

$$[(n+1)!+2],\ [(n+1)!+3],\ [(n+1)!+4] \ldots$$
до $[(n+1)!+n+2]$ включительно.

Числа эти идут непосредственно друг за другом в натуральном ряду, так как каждое следующее на 1 больше предыдущего. Надо доказать, однако, что все они — составные.

Первое число:

$$(n+1)!+2 = 1.2.3.4.5.6.7 \ldots\ldots\ldots (n+1)+2.$$

Число это—четное, так как оба его слагаемые содержат множитель 2. А всякое четное число, больше 2—составное.

Второе число:

$$(n+1)!+3 = 1.2.3.4.5 \ldots\ldots (n+1)+3$$

состоит из двух частей, каждая из которых кратна 3. Значит, и это число составное.

Третье число:

$$(n+1)!+4=1.2.3.4.5 \ldots\ldots (n+1)+4$$

делится без остатка на 4, так как состоит из частей кратных 4.

Подобным же образом устанавливаем, что следующее число:

$$(n+1)!+5$$

кратно 5 и т. д. Иначе говоря: каждое число нашего ряда содержит множитель, отличный от единицы и его самого, и является, следовательно, составным.

Если вы желаете написать, например, 5 последовательных составных чисел, вам достаточно в приведенное раньше общее выраженис подставить вместо n число 5. Вы получите ряд

722, 723, 724, 725, 726.

Но это не единственный ряд из пяти последовательных составных чисел. Есть и другие.

При желании найти пять наименьших последовательных составных чисел, мы должны в выражении

$$(n+1)!+2$$

вместо $(n+1)!$, взять не $6!$, а общее наименьшее кратное чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Это кратное равно 2.3.2.5.2=120. Тогда получится ряд

120, 121, 122, 123, 124.

Попробуем теперь решить задачу:

Написать десять последовательных составных чисел.

Решение

На основании ранее сказанного устанавливаем, что первое из искомых десяти чисел есть

(наим. кратное чисел 1, 2, 3, 4... 10, 11) + 2,

$$2.3.2.5.7.2.3.\ 11+2=27\,722.$$

Значит ближайшая (наименьшая) серия десяти составных последовательных чисел такова:

27 722	27 727
27 723	27 728
27 724	27 729
27 725	27 730
27 726	27 731

ЧИСЛО ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Мы сейчас убедились, что практически всегда возможно найти ряд из любого числа последовательных составных чисел — из тысячи, из миллиона, из квадриллиона и т. д. Существование сколь угодно длинных серий последовательных чисел сплошь составных способно возбудить сомнение в том, действительно ли ряд простых чисел не имеет конца. Не лишним будет поэтому привести здесь доказательство бесконечности ряда простых чисел.

Доказательство это — „от противного". Предположим, что ряд простых чисел конечен, и обозначим последнее простое число в этом ряду буквою N. Составим произведение

$$1.2.3.4.5.6.7 \ldots\ldots N = N!$$

и прибавим к нему 1. Получим

$$N! + 1.$$

Это число не делится без остатка ни на одно из чисел меньших чем N, — всякий раз получится остаток 1. Но, быть может, оно делится на какое-нибудь число б о л ь ш е е N? Что же это, однако, может быть за делитель? Конечно, не простое число, так как простых чисел, больших нежели N, не существует (мы ведь из этого исходим). Значит, оно составное, разлагающееся на множителей. Но среди этих множителей должно непре-

менно быть меньшее N (потому что разлагаемое число меньше $N!$), а мы уже знаем, что $N!+1$ не делится ни на какое число меньшее N, — следовательно, не может делиться и на их произведение или на число, содержащее множителем хотя бы одно из них.

Итак, нельзя было допустить, что ряд простых чисел конечен: предположение это приводит к противоположному заключению. Какую бы длинную серию последовательных составных чисел мы ни встретили в ряду натуральных чисел, мы можем быть убеждены, что за нею найдется еще бесконечное множество простых чисел.

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РАСЧЕТ

В вычислительной практике встречаются такие чисто арифметические выкладки, выполнение которых без помощи облегчающих методов алгебры чрезвычайно затруднительно. Пусть, например, требуется найти результат таких действий:

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90\,000\,000\,000}}$$

Вычисление это необходимо для того, чтобы установить, в праве ли современная техника пользоваться прежним законом сложения скоростей, не считаясь с теми изменениями, которые внесены в механику теорией относительности. Согласно старой механике, скорость тела, участвующего в двух одинаково направленных движениях, каждое со скоростью 1 километра в секунду, равна 2 километрам в секунду. Новое же учение дает для этой скорости выражение, приведенное выше. На сколько же разнятся эти результаты? Уловима ли разница для тончайших измерительных приборов? Для выяснения этого важного вопроса и приходится выполнить такое вычисление.

Сделаем это вычисление двояко; сначала обычным арифметическим путем, а затем покажем, как получить результат приемами алгебры. Достаточно одного взгляда на приведенные далее длинные ряды цифр, чтобы убедиться в неоспоримых преимуществах алгебраического способа.

Прежде всего преобразуем нашу „многоэтажную" дробь:

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90\,000\,000\,000}}=\frac{180\,000\,000\,000}{90\,000\,000\,001}$$

Произведем теперь деление числителя на знаменатель:

```
180000000000 | 90000000001
 90000000000 |-------------
------------ | 1,999999999977. .
899999999990
810000000009
------------
 899999999810
 810000000009
 ------------
  899999998010
  810000000009
  ------------
   899999980010
   810000000009
   ------------
    899999800010
    810000000009
    ------------
     899998000010
     810000000009
     ------------
      899980000010
      810000000009
      ------------
       899800000010
       810000000009
       ------------
        898000000010
        810000000009
        ------------
         880000000010
         810000000009
         ------------
          700000000010
          630000000007
          ------------
           70000000003
```

Вычисление, как видите, утомительное, кропотливое; в нем легко запутаться и ошибиться. Между тем, для решения задачи важно в точности знать, на котором именно месте обрывается ряд девяток и начинается серия других цифр.

Сравните теперь, как удобно справляется с тем же расчетом алгебра. Она пользуется следующим приблизительным равенством: если a весьма малая дробь, то

$$\frac{1}{1+a} \backsim 1-a$$

где знак $\backsim$ означает: „приближенно равно".

Убедиться в справедливости этого утверждения очень просто: сравним делимое (1) с произведением делителя на частное

$$1=(1+a)\ (1-a)$$

$$1=1-a^2.$$

Так как a — весьма малая дробь (например, 0,001), то a^2 еще меньшая дробь (0,000001), и ею можно пренебречь.

Применим сказанное к нашему расчету:

$$\frac{2}{1+\frac{1}{90\,000\,000\,000}}=\frac{2}{1+\frac{1}{9\cdot 10^{10}}}=$$

$$=2-0{,}222\ldots\times 10^{-10}=2-0{,}0000\,000\,000\,222\ldots=$$
$$=1{,}9999999999777\ldots$$

Мы пришли к тому же результату, что и раньше, но гораздо более коротким и надежным путем.

Читателю, вероятно, интересно знать, каково значение полученного результата в поставленной нами задаче из области механики. Он показывает, что уклонение от старого закона сложения скоростей хотя и существует, но ни в коем случае не может быть обнаружено: оно

сказывается на одиннадцатой цифре определяемого числа, а самые точные измерения длины не идут далее 7-й цифры, в технике же ограничиваются 3—4 цифрами. Мы в праве поэтому утверждать без всяких оговорок, что новая (Эйнштейнова) механика практически ничего не меняет в современной технике.

КОГДА БЕЗ АЛГЕБРЫ ПРОЩЕ?

Наряду с случаями, когда алгебра оказывает арифметике существенные услуги, бывают и такие, когда вмешательство алгебры вносит лишь ненужное осложнение. Истинное знание математики состоит в уменьи так распоряжаться математическими средствами, чтобы избирать всегда самый прямой и надежный путь, не считаясь с тем, относится ли метод решения задачи к арифметике, алгебре, геометрии и т. д. Полезно будет поэтому рассмотреть случай, когда привлечение алгебры способно лишь запутать решающего. Поучительным примером может служить следующая задача:

Найти наименьшее из всех тех чисел, которые при делении

на 2 дают в остатке	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	7
9	8

Решение

Задачу эту предложили мне со словами: „Как вы решили бы такую задачу? Здесь слишком много уравнений; не выпутаться из них“.

Ларчик просто открывается; никаких уравнений, никакой алгебры для решения задачи не требуется,—она решается несложным арифметическим рассуждением.

Прибавим к искомому числу единицу. Какой остаток оно даст тогда при делении на 2? Остаток $1 + 1 = 2$; другими словами — число разделится на 2 без остатка. Точно также разделится оно без остатка и на 3, на 4, на 5, на 6, на 7, на 8 и на 9. Наименьшее из таких чисел есть

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 7\,560.$$

А искомое число — 7 559, в чем нетрудно убедиться испытанием.



ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ

ПОКУПКА ШЛЯПЫ

Вы должны уплатить за купленную в магазине шляпу 19 рублей. У вас имеются одни лишь трехрублевки, у кассира — только пятирублевки. Можете ли вы, при наличии таких денег, расплатиться с кассиром и как именно?

Вопрос задачи сводится к тому, чтобы узнать, сколько должны вы дать кассиру трехрублевок, чтобы, получив сдачу пятирублевками, уплатить 19 рублей. Неизвестных в задаче два — число (x) трехрублевок и число (y) пятирублевок. Но уравнений мы можем составить только одно:

$$3x - 5y = 19.$$

Хотя одно уравнение с двумя неизвестными имеет бесчисленное множество решений, это не значит, что задача наша неразрешима. Ведь вполне достаточно в данном случае найти хотя бы одно решение. Вот почему алгебра разработала метод решения подобных „неопре-

деленных" уравнений. Заслуга введения их в алгебру принадлежит первому европейскому представителю этой науки, знаменитому математику древности Диофанту (III в. до н. э.), отчего такие уравнения часто называют „Диофантовыми". В программу нашей школы они теперь, за недостатком учебного времени, не включаются, хотя надобность в них на практике возникает довольно часто Тем более оснований остановиться на них в нашей книге,

На приведенном ранее примере покажем, как следует решать подобные уравнения.

Нам надо найти значения x и y в уравнении

$$3x-5y=19,$$

зная при этом, что x и y — числа целые и положительные (вспомним, что это числа кредитных билетов).

Уединим то неизвестное, коэфициент которого меньше, т. е. член $3x$; получим:

$$3x=19+5y,$$

откуда

$$x=\frac{19}{3}+\frac{5y}{3}=6\frac{1}{3}+1\frac{2}{3}y=6+y+\frac{1+2y}{3}$$

Так как x, 6 и y — числа целые, то равенство может быть справедливо лишь при условии, что $\frac{1+2y}{3}$ есть также целое число. Обозначим его буквою t. Тогда

$$x=6+y+t,$$

$$t=\frac{1+2y}{3},$$

где

$$t=\frac{1+2y}{3}$$

и значит:

$$3t=1+2y; \qquad 2y=3t-1$$

Из последнего уравнения определяем y:

$$y=\frac{3t}{2}-\frac{1}{2}=t+\frac{t-1}{2}$$

Так как y и t — числа целые, то и $\frac{t-1}{2}$ должно быть неким целым числом t_1. Следовательно,

$$y = t + t_1,$$

при чем

$$t_1 = \frac{t-1}{2}$$

откуда

$$2t_1 = t - 1, \qquad \text{и } t = 2t_1 + 1$$

Значение $t = 2t_1 + 1$ подставляем в предыдущие равенства:

$$y = t + t_1 - (2t_1 + 1) + t_1 = 3t_1 + 1$$
$$x = 6 + y + t = 6 + (3t_1 + 1) + (2t_1 + 1) = 8 + 5t_1$$

Итак, для x и y мы нашли выражения:

$$x = 8 + 5t_1,$$
$$y = 1 + 3t_1$$

Числа x и y, мы знаем, не только целые, но и положительные, т. е. бо̀льшие чем 0. Следовательно,

$$8 + 5t_1 > 0$$
$$1 + 3t_1 > 0$$

Из этих „неравенств“ находим:

$$5t_1 > -8 \qquad \text{и } t_1 > -\frac{8}{5}$$

$$3t_1 > -1 \qquad \text{и } t_1 > -\frac{1}{3}$$

Этим величина t_1 ограничивается; она больше чем $-\frac{1}{3}$ (и значит, тем самым больше $-\frac{7}{3}$). Но так как t_1 число целое, то для него возможны лишь следующие значения:

$$t_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4...$$

Соответствующие значения для x и y таковы:

$$x = 8 + 5t_1 = 8,\ 13,\ 18,\ 23...$$
$$y = 1 + 3t_1 = 1,\ 4,\ 7,\ 10...$$

Теперь мы установили, как может быть произведена уплата:

вы платите либо 8 трехрублевок, получая одну пятирублевку сдачи:

$$8 . 3 - 5 = 19,$$

либо платите 13 трехрублевок, получая сдачи 4 пятирублевки:

$$13 . 3 - 4 . 5 = 19$$

и т. д.

Теоретически задача имеет бесчисленный ряд решений, практически же число решений ограничено, так как ни покупатель, ни кассир не имеют бесчисленного множества кредитных билетов. Если, например, у каждого всего по 10 билетов, то расплата может быть произведена только одним способом: выдачей 8 трехрублевок и получением 5 рублей сдачи. Как видим, неопределенные уравнения практически могут давать вполне определенные решения.

Возвращаясь к нашей задаче, предлагаем читателю, в качестве упражнения, самостоятельно решить ее вариант, а именно, — рассмотреть случай, когда у покупателя только пятирублевки, а у кассира только трехрублевки. В результате получится такой ряд решений:

$x = 5$	8	11
$y = 2$	7	12

Действительно:

$$5.5 - 2.3 = 19$$
$$8.5 - 7.3 = 19$$
$$11.5 - 12.3 = 19$$

Мы могли бы получить эти результаты также и из готового решения основной задачи, воспользовавшись простым алгебраическим приемом. Так как *давать* пятирублевки и *получать* трехрублевки все равно, что „*получать* отрицательные пятирублевки“ и „*давать* отрицательные трехрублевки“, то новый вариант задачи решается тем же уравнением, которое мы составили для основной задачи:

$$3x - 5y = 10$$

при условии, что x и y — числа *отрицательные*. Поэтому из равенств

$$x = 8 + 5t_1$$
$$y = 1 + 3t_1$$

мы, зная, что $x < 0$ и $y < 0$, выводим:

$$8 + 5t_1 < 0$$
$$1 + 3t_1 < 0$$

и следовательно,

$$t_1 < -\frac{8}{5}.$$

Принимая $t_1 = -2, -3, -4$ и т. д. получаем из предыдущих формул следующие значения для x и y:

$t_1 = -2$	-3	-4
$x = -2$	-7	-12
$y = -5$	-8	-11

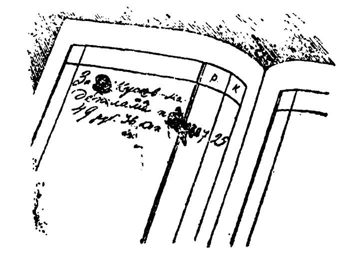
Первая пара решений, $x = -2$, $y = -5$, означает, что покупатель „платит минус 2 трехрублевки“ и „получает минус 5 пятирублевок“; т. е. в переводе на обычный язык — платит 5 пятирублевок и получает сдачи 2 трехрублевки. Подобным же образом истолковываем и прочие решения.

РЕВИЗИЯ КООПЕРАТИВА

При ревизии торговых книг кооператива одна из записей оказалась залитой чернилами и имела такой вид:

„За   кусков мадеполама
по 49 р. 36 к. кусок   *** 7 р. 28 к.

Невозможно было разобрать числа проданных кусков, но было несомненно, что число это не дробное; в вырученной сумме можно было различить только последние три цифры, да установить еще, что перед ними были три каких-то других цифры.



Может ли ревизионная комиссия по этим следам установить запись?

Решение

Обозначим число кусков через x. Вырученная сумма выразится в копейках через

$$4936\,x.$$

Число, выражаемое тремя залитыми цифрами в записи денежной суммы, обозначим через y. Это, очевидно, число тысяч копеек; а вся сумма в копейках изобразится так:

$$1000y + 728.$$

Имеем уравнение:

$$4936x = 1000y + 728,$$

или, после сокращения на 8, —

$$617\,x - 125y = 91.$$

В этом уравнении x и y — числа целые, и при этом x не больше 999, так как более чем из трех девяток

число это состоять не может. Решаем это уравнение, как раньше было указано:

$$125y = 617\ x - 91$$

$$y = 5x - 1 + \frac{34 - 8x}{125} = 5x - 1 + \frac{2(17 - 4x)}{125} = 5x - 1 + 2t$$

(Здесь мы приняли $\frac{617}{125} = 5 - \frac{4}{125}$, так как нам выгодно иметь возможно меньшие остатки.)

Дробь

$$\frac{2\ (17 - 4x)}{125}$$

есть целое число, а так как 2 не делится на 125, то $\frac{17 - 4x}{125}$ должно быть целым числом, которое мы и обозначим через t.

Далее из уравнения

$$\frac{17 - 4x}{125} = t$$

$$17 - 4x = 125t$$

$$x = 4 - 31t + \frac{1 - t}{4} = 4 - 31\ t + t_1,$$

$$\text{где } t_1 = \frac{1 - t}{4}$$

и следовательно,

$$4t_1 = 1 - t;\ t = 1 - 4t_1$$

$$x = 125\,t_1 - 27, \qquad y = 61\ t_1 - 134.$$ [1]

Мы знаем, что

$$100 < y < 1000$$

Следовательно,

$$100 < (617\ t_1 - 134) < 1000,$$

---

[1] Обратите внимание на то, что коэффициенты при t_1 равны коэффициентам при x и y в исходном уравнении $617x - 125y = 91$, причем у одного из коэффициентов при t_1 знак обратный. Это не случайность: можно доказать, что так необходимо должно быть.

откуда

$$t_1 > \frac{234}{617} \qquad \text{и } t_1 < \frac{1134}{617}$$

$$0{,}4 < t_1 < 1{,}8.$$

Очевидно, для t_1 существует только одно значение:

$$t_1 = 1,$$

и тогда $x = 98$, $y = 483$: было отпущено 98 кусков на сумму 4837 р. 28 к. Запись восстановлена.

ПОКУПКА ПОЧТОВЫХ МАРОК.

Требуется на 1 рубль купить 20 штук почтовых марок — 15-копеечных, 5-копеечных и копеечных. Сколько окажется марок каждого достоинства?

Решение

В этом случае у нас имеется два уравнения с тремя неизвестными

$$15\,x + 5\,y + z = 100$$
$$x + y + z = 20$$

где x — число марок 15-копеечных, y — пятикопеечных, z — копеечных. Вычтя из первого уравнения второе, получим одно уравнение с двумя неизвестными

$$14x + 4y = 80$$

Делим все члены на 4:

$$7.\frac{x}{2} + y = 20.$$

Очевидно $\frac{x}{2}$ — число целое. Обозначим его через t.

Имеем

$$7t + y = 20; \qquad y = 20 - 7t$$
$$x = 2t$$

Подставляем выражения для x и y во второе из исходных уравнений:

$$2t = 20 - 7t + z = 20;$$

$$z = 5t$$

Так как $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$, то нетрудно установить границы для t:

$$0 < t < 2\frac{6}{7},$$

откуда заключаем, что для t возможны только два целых значения

$$t = 1 \text{ и } t = 2$$

Соответствующие значения x, y, z таковы:

$t =$	1	2
$x =$	2	4
	13	6
$z =$	5	10

Проверка

2. 15 + 13.5 + 5 = 100
4. 15 + 6.5 + 10 = 100

Итак, покупка марок может быть произведена только двумя способами.

Следующая задача в том же роде.

ПОКУПКА ФРУКТОВ

На 5 рублей куплено 100 штук разных фруктов. Цены на фрукты в кооперативе таковы:

арбузы, штука	50 к.
яблоки	10
сливы	1

Сколько фруктов каждого рода было куплено?

Решение

Обозначив число арбузов через x, яблок через y и слив через z, составляем два уравнения:

$$50x + 10y + z = 500$$

$$x + y + z = 100$$

Вычтя из первого второе, имеем

$$49x + 9y = 400$$

Дальнейший ход решения таков:

$$y = \frac{400 - 49x}{9} = 44 - 5x + \frac{4(1-x)}{9} = 44 - 5x + 4t,$$

$$t = \frac{1-x}{9}; \qquad x = 1 - 9t$$

$$y = 44 - 5\ (1 - 9t) + 4t = 39 + 49t$$

Из неравенств

$$1 - 9t > 0 \text{ и } 39 + 49t > 0$$

устанавливаем, что

$$\frac{1}{9} > t > -\frac{39}{49}$$

и следовательно $t = 0$. Поэтому

$$x = 1, \qquad y = 39.$$

Подставив эти значения x и y во второе уравнение, определяем $z = 60$.

Итак, куплен был 1 арбуз, 39 яблок и 60 слив.

Других комбинаций быть не может.

ОТГАДАТЬ ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ

Уменье решать неопределенные уравнения дает возможность выполнить следующий математический фокус.

Вы предлагаете товарищу умножить число даты его

рождения на 12, а номер месяца — на 31. Он сообщает вам сумму обоих произведений, и вы вычисляете по ней дату рождения.

Если, например, товарищ ваш родился 9 февраля, то он выполняет следующие выкладки:

$$9 \times 12 = 108, \qquad 2 \times 31 = 62$$

$$108 + 62 = 170$$

Это последнее число, 170, он сообщает вам, и вы определяете по нему задуманную дату. Как?

Решение

Задача сводится решению неопределенного уравнения

$$12x + 31y = 170$$

в целых и положительных числах, при чем число месяца x не больше 31, а номер месяца y не больше 12.

Решаем:

$$6x + 31\frac{y}{2} = 85$$

$$6x + 31t = 85, \qquad y = 2t$$

$$x = \frac{85 - 31t}{6} = 14 - 5t + \frac{1 - t}{6} = 14 - 5t + t_1$$

$$1 - t = 6t_1; \; t = 1 - 6t_1,$$

$$x = 14 - 15(1 - 6t_1) + t_1 = 9 + 31t_1$$

$$y = 2(1 - 6t_1) = 2 - 12t_1$$

Зная, что $31 > x > 0$ и $12 > y > 0$, находим границы для t:

$$\frac{1}{6} > t > -\frac{9}{31}$$

Следовательно,

$$t = 1; \; x = 9; \; y = 2.$$

Дата рождения — 9 число 2-го месяца, т. е. 9 февраля.

Теоретически можно доказать, что какая бы дата ни отгадывалась, уравнение имеет всегда только одно решение, т. е. фокус удается без отказа.

ПРОДАЖА КУР

(Старинная задача)

Три сестры пришли на рынок с курами. Одна принесла для продажи 10 кур, другая 16, третья 26. До полудня они продали часть своих кур по одной и той же цене. После полудня, опасаясь, что не все куры будут проданы, они понизили цену и распродали оставшихся кур снова по одинаковой цене. Домой все трое вернулись с одинаковой выручкой: каждая сестра получила от продажи 35 рублей.

По какой цене продавали они кур до и после полудня?

Решение

Обозначим число кур, проданных каждой сестрой до полудня, через x, y, z. Во вторую половину дня они продали $10-x$, $16-y$, $26-z$. Цену до полудня обозначим через m, после полудня — через n. Для ясности сопоставим эти обозначения:

	Число кур			Цена
До полудня	x	y	z	m
После полудня .	$10-x$	$16-y$	$26-z$	n

Первая сестра выручила:

$mx+n\ (10-x)$; след., $mx+n\ (10-x)=35$,

вторая —

$$my + n\ (16 - y);\ \text{след.,}\ \ my + n\ (16 - y) = 35$$

третья —

$$mz + n\ (26 - z);\ \text{след.,}\ \ mz + n\ (26 - z) = 35.$$

Преобразуем эти три уравнения; получаем:

$$(m - n)\, x + 10n = 35$$
$$(m - n)\, y + 16n = 35$$
$$(m - n)\, z + 26n = 35.$$

Вычтя из третьего уравнения первое, затем второе получим последовательно

$$(m - n)\ (z - x) + 16n = 0$$
$$(m - n)\ (z - y) + 10n = 0$$

Или

$$(m - n)\ (x - z) = 16n$$
$$(m - n)\ (y - z) = 10n$$

Делим первое из этих уравнений на второе:

$$\frac{x - z}{y - z} = \frac{8}{5},\ \text{или}\ \frac{x - z}{8} = \frac{y - z}{5}.$$

Так как x, y, z — числа целые, то и разности $x - z$, $y - z$ тоже целые числа. Поэтому, для существования равенства

$$\frac{x - z}{8} = \frac{y - z}{5}$$

необходимо, чтобы $x - z$ делилось на 8, а $y - z$ на 5. Следовательно:

$$\frac{x - z}{8} = t = \frac{y - z}{5},$$

откуда

$$x = z + 8t$$
$$y = z + 5t,$$

Так как $x < 10$, то

$$z + 8t < 10,$$

При целых и положительных z и t последнее неравенство удовлетворяется только в одном случае: когда $z=1$, а $t=1$. Подставив эти значения в уравнения:

$$x = z + 8t \text{ и } y = z + 5t,$$

находим $x = 9$, $y = 6$.

Теперь, обращаясь к уравнениям:

$$mx + n\ (10 - x) = 35,$$
$$my + n\ (16 - y) = 35,$$
$$mz + n\ (26 - z) = 35,$$

и подставив в них значения x, y, z, узнаем цены, по каким продавались куры

$$m = 3^3/_4 \text{ руб.}; \ n = 1^1/_4 \text{ руб.}$$

Итак, куры продавались до полудня по 3 р. 75 к., после полудня — по 1 р. 25 к.

ДВА ЧИСЛА И ЧЕТЫРЕ ДЕЙСТВИЯ

Предыдущую задачу, которая привела к трем уравнениям с пятью неизвестными, мы решили не по общему образцу, а по свободному математическому соображению. Точно так же будем решать и следующие задачи, приводящие к неопределенным уравнениям второй степени.

Вот первая из них.

Над двумя целыми числами сделаны были следующие 4 действия:

1) их сложили;
2) вычли из большего меньшее;
3) перемножили;
4) разделили большее на меньшее.

Полученные результаты сложили — составилось 243. Найти эти числа.

Решение

Если большее число x, меньшее y, то

$$x + y + x - y + xy + \frac{x}{y} = 243.$$

Делаем следующие преобразования:

$$2x + xy + \frac{x}{y} = 243$$

$$2xy + xy^2 + x = 243y$$

$$x\ (2y + y^2 + 1) = 243y.$$

Но $2y + y^2 + 1 = (y + 1)^2$. Поэтому

$$x = \frac{243y}{(y+1)^2}$$

Чтобы x было целое число, знаменатель $(y + 1)^2$ должен быть одним из делителей числа 243 (потому что y не может делиться на $y + 1$). Зная, что $243 = 3.9^2$, заключаем, что $(y + 1)^2 = 9^2$, и $y = 8$.

Тогда

$$x = \frac{243.8}{81} = 24.$$

Итак, искомые числа — 24 и 8.

КАКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНИК?

Стороны прямоугольника выражаются целыми числами. Какой длины должны они быть, чтобы сумма их численно равнялась площади прямоугольника?

Решение

Обозначив стороны прямоугольника через x и y, составляем уравнение

$$2x + 2y = xy.$$

Преобразуем его:

$$x(y-2)=2y,$$

$$x=\frac{2y}{y-2}=\frac{2}{1-\frac{2}{y}}.$$

Чтобы x было числом целым и положительным, необходимо иметь

$$1-\frac{2}{y}>0, \text{ и следовательно } y>2.$$

$$1-\frac{2}{y}\leqslant 2, \text{ и следовательно, } y>-2.$$

Другими словами, y должно быть больше 2. Это условие необходимо, чтобы x было целым, но еще недостаточно. Сделаем испытание: подставим в выражение

$$x=\frac{2}{1-\frac{2}{y}}$$

вместо y, числа 3, 4, 5, 6 и т. д. Получим

$y=3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8...$
$x=6;\ 4;\ 3{,}3;\ 3;$ дроби...

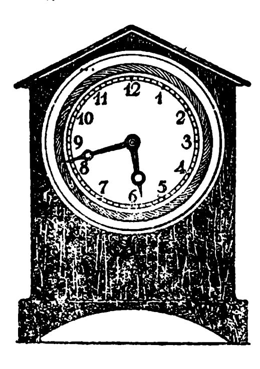
Итак, искомая фигура есть либо прямоугольник со сторонами 3 и 6, либо квадрат со сторонами 4.

ОБМЕН ЧАСОВЫХ СТРЕЛОК

Биограф и друг знаменитого физика А. Эйнштейна, небезызвестный математик А. Мошковский, желая однажды развлечь своего приятеля во время болезни, предложил ему задачу, относящуюся к рассматриваемому отделу алгебры.

„Возьмем, — сказал Мошковский, — положение стрелок в 12 часов. Если бы в этом положении большая и малая стрелки обменялись местами, они дали бы все же

правильные показания. Но в другие моменты, — например, в 6 часов, взаимный обмен стрелок привел бы к абсурду, к положению, какого на правильно идущих часах быть не может: минутная стрелка не может стоять на 6, когда часовая показывает 12. Возникает вопрос:



„Когда и как часто стрелки часов занимают такие положения, что замена одна другой дает новое положение, тоже возможное на правильных часах?

„— Да, — ответил Эйнштейн, — это вполне подходящая задача для человека, вынужденного болезнью оставаться в постели: достаточно интересная и не слишком легкая. Боюсь только, что развлечение продлится не долго: я напал уже на путь к решению.

„И приподнявшись на постели, он несколькими штрихами набросал на бумаге схему, изображающую условия задачи. Для решения ему понадобилось не больше времени, чем мне на формулировку задачи. Получилось неопределенное уравнение, которое он решил в целых числах".

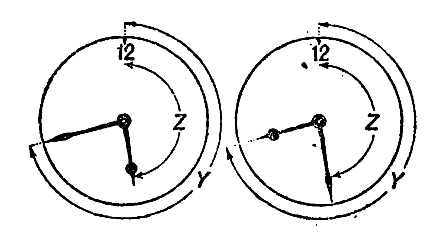
Как же решается эта задача?

Решение

Будем измерять расстояния стрелок по кругу циферблата от точки, где цифра XII, в 60-х долях окружности. Так как минутная стрелка обходит полный круг в час, а часовая успевает в то же время пройти только

1/12 часть круга, то каждое деление, составляющее 1/60 круга, минутная стрелка проходит в 1 минуту, а часовая — в 12 минут.

Пусть одно из требуемых положений стрелок наблюдалось в x часов y минут. Минутная стрелка находится от цифры XII в y делениях, часовая — на некотором расстоянии в z делений. Установим зависимость между x, y и z. Так как от XII прошло x часов, то минутная



стрелка сделала x полных оборотов и еще y делений, т. е. в итоге продвинулась на $60x + y$ делений. Часовая стрелка, движущаяся в 12 раз медленнее, прошла 12-ю долю от $60x + y$, значит ее расстояние (z делений) от цифры XII составляет

$$z = \frac{60x + y}{12}$$

Когда стрелки обменяются местами, часы будут показывать новое число x_1 часов и z минут, при чем часовая стрелка будет отстоять от цифры XII на y делений. Это расстояние y должно равняться

$$y = \frac{60x_1 + y}{12}.$$

Имеем систему двух уравнений с 4 неизвестными

$$\begin{cases} z=\frac{60x+y}{12} \\ y=\frac{60x_1+z}{12} \end{cases}$$

в которых x и x_1 целые числа от 0 до 11. [1] Чтобы найти эти значения неизвестных, выразим z и y через x и x_1. Получим

$$y=\frac{60(x+12x_1)}{143}$$

$$z=\frac{60(x_1+12x)}{143}.$$

В этих двух выражениях x и x_1 — целые числа часов, могущие меняться от 0 до 11

$x = 0, 1, 2, 3.$ 11.

$x_1 = 0, 1, 2, 3.$ 11.

Давая x и x_1 эти значения, мы определим все требуемые моменты. Число этих моментов (и значит, число обмениваемых положений) довольно значительно, но все же ограничено: оно равно $12 \times 12 = 144$, так что далеко не каждому положению стрелок отвечает другое, с возможным обратным расположением.

При $x = 0$, $x_1 = 0$ имеем

$z = 0$, $y = 0$,

т. е. часы показывают 12.

Всех возможных положений мы рассматривать не станем; возьмем лишь два примера

$x = 1$, $x_1 = 1$:

$$y=\frac{60 . 13}{143}=5\frac{5}{11};\quad z=5\frac{5}{11},$$

---

[1] Значения $x = 12$, $x_1 = 12$ практически равнозначащи с $x = 0$, $x_1 = 0$.

т. е. часы показывают 1 ч. $5^5/_{11}$ мин. и при том встречаются; их положение, конечно, может быть обменено (как и при всех других случаях встречи стрелок).

$$x = 5, \qquad x_1 = 8.$$

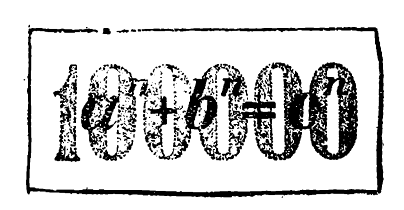
$$y = \frac{60\ (5 + 12.8)}{143} = 42{,}3;$$

$$z = \frac{60\ (8 + 12.5)}{143} = 28{,}5.$$

Соответствующие моменты: 5 ч. 42,3 мин. и 8 ч. 28,5 мин.

Число решений, мы знаем, $12 \times 12 = 144$. Чтобы найти все точки циферблата, которые дают требуемые положения стрелок, надо окружность циферблата разделить на 143 равные части: получим 144 точки, являющиеся искомыми. В промежуточных точках требуемые положения стрелок невозможны.

Первоначальным автором этой задачи является известный французский математик Ш. Лезан, прославившийся у нас талантливой книжкой „Начатки математики". Задача была опубликована им во французском „Журнале элементарной математики" в 1882 г.



СТО ТЫСЯЧ ЗА РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Одна из задач из области неопределенных уравнений приобрела в последние десятилетия громкую известность, так как за правильное ее решение завещано целое состояние: 100 000 немецких марок!

Задача состоит в том, чтобы доказать следующее положение, носящее название теоремы, или „великого предложения“, Ферма:

> сумма одинаковых степеней двух целых чисел не может быть тою же степенью какого-либо третьего числа. Исключение составляет лишь вторая степень, для которой это возможно.

Иначе говоря, надо доказать, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

неразрешимо в целых числах для $n > 2$.

Поясним сказанное. Довольно легко подобрать сколько угодно пар чисел, сумма вторых степеней которых также есть вторая степень. Простейший пример: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Но попробуйте составить аналогичный пример для третьих степеней: ваши поиски останутся тщетными.[1] Тот же неуспех ожидает вас и при подыскании примеров для четвертой, пятой, шестой и т. д. степеней. Это и утверждает „великое предложение Ферма“.

Что же требуется от соискателей премии? Они должны доказать это положение. Дело в том, что теорема Ферма еще не доказана и висит, так сказать, в воздухе. Прошло свыше двух столетий с тех пор, как она высказана, но математикам не удалось до сих пор найти ее доказательства. Величайшие математики трудились над этой проблемой, — однако, в лучшем случае им удавалось доказать теорему лишь для того или иного отдельного показателя или групп показателей, — необходимо же

---

[1] Любопытно, однако, что сумма кубов трех целых чисел может быть кубом четвертого целого числа, — как, например, в ряду следующих четырех чисел

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

найти общее доказательство для всякого целого показателя.

Замечательно, что неуловимое доказательство Ферматовой теоремы, повидимому, однажды уже было найдено, но затем вновь утрачено. Автор теоремы, гениальный математик XVII века Пьер Ферма [1] утверждал, что ее доказательство ему известно. Свое „великое предложение“ он записал (как и ряд других теорем из теории чисел) в виде заметки на полях сочинения Диофанта, сопроводив его такой припиской:

„Я нашел поистине удивительное доказательство этого предложения, но здесь мало места, чтобы его привести“.

Ни в бумагах великого математика, ни в его дружеской переписке, нигде вообще в другом месте следов этого доказательства найти не удалось.

Последователям Ферма пришлось итти самостоятельным путем. Вот результаты этих усилий: Эйлер (в 1797 г.) доказал теорему Ферма для третьей степени; для пятой степени [2] ее доказал Лежандр (в 1823 г.), для седьмой — Ламе и Лебег (1840). В 1849 г. Куммер доказал теорему для обширной группы степеней и между прочим — для всех показателей меньше ста. Эти последние работы далеко выходят за пределы той области математики, какая знакома была Ферма, и становится загадочным, как мог последний разыскать общее доказательство своего „великого предложения“.

---

[1] Ферма (1608—1665) не был профессионалом-математиком. Юрист по образованию, советник парламента, он занимался математическими изысканиями лишь между делом. Это не помешало ему сделать ряд чрезвычайно важных открытий, которых он, впрочем, не публиковал, а по обычаю той эпохи сообщал в письмах к своим ученым друзьям: к Паскалю, Декарту, Гюйгенсу, Робервалю и др.

[2] Для составных показателей особого доказательства не требуется: эти случаи сводятся к случаям с первоначальными показателями.

Завещание, о котором мы говорили и которое сделало Ферматову теорему столь популярной, оставлено было в 1907 году на имя Геттингенской академии наук. Вот текст соответствующего объявления этой академии, опубликованного 27 июня 1908 г.

„Согласно завещанию, оставленному на наше имя покойным доктором Павлом Вольфскелем в Дармштадте, объявляется премия в 100 000 марок тому, кому раньше всех удастся найти доказательство „великой теоремы Ферма". Д-р Вольфскель обращает внимание на то, что Ферма высказал утверждение, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет целых решений для всех нечетных простых показателей. Теорема Ферма должна быть доказана либо в самой общей форме, либо в форме дополнения к исследованиям Куммера,—но во всяком случае для всех показателей n, для которых теорема вообще имеет место.

„Премия учреждается на следующих условиях:

„Геттингенской академии наук принадлежит право свободно решить, кому должна быть присуждена премия. Никаких рукописей, имеющих отношение к соисканию премии, она не принимает; она рассматривает только такие математические сочинения, которые появились в журналах или выпущены отдельными книгами, имеющимися в продаже. Академия предлагает авторам подобных сочинений прислать ей 5 печатных экземпляров.

„Академия слагает с себя ответственность за нерассмотрение работ, о которых она не была осведомлена, а также за недоразумения, могущие возникнуть из-за того, что истинный автор работы (или части ее) остался академии неизвестным.

„Присуждение премии последует не ранее двух лет с момента появления сочинения, достойного премии. В течение этого срока все германские и иные матема-

тики могут высказаться по поводу правильности предложенного решения.

„Акт о присуждении премии не может быть оспариваем.

„Если к 13 сентября 2007 года премия не будет присуждена, то никаких притязаний на нее предъявлено быть не может“.

К объявлению Геттингенской академии, которое приведено здесь с несущественными пропусками, интересно присоединить замечания, сделанные по этому поводу знаменитым германским математиком Ф. Клейном (ныне умершим):

„Со времени первого опубликования завещания Вольфскеля в Геттингенскую академию поступило уже несколько сот так называемых „доказательств“ теоремы Ферма, и надо думать, что после официального объявления о премии число их значительно возрастет. При этом число подлинных математиков, участвующих в соискании, весьма незначительно. Большая часть решений поступает от инженеров, директоров банков, учащихся обоего пола, школьников, пасторов, учителей. Ни один из соискателей не вступил на путь исследований, основанных на теории чисел,—путь, который во всяком случае имел в виду завещатель. Очевидно, желание овладеть 100 000 марок гораздо более распространено, чем интерес к глубоким соотношениям в области современной математики.

„При таком положении дела очевидно невозможно и даже бесполезно для академии вступать в переписку с отдельными соискателями по поводу ошибочности их доказательств. Академия выступит только тогда, когда ей будет доставлено правильное доказательство. Пока же она молчит, до тех пор, следовательно, правильное решение еще не предложено“.

Какие ошибки возможны в поисках этого неуловимого доказательства, показывает случай с выдающимся немецким математиком Ф. Линдеманом.

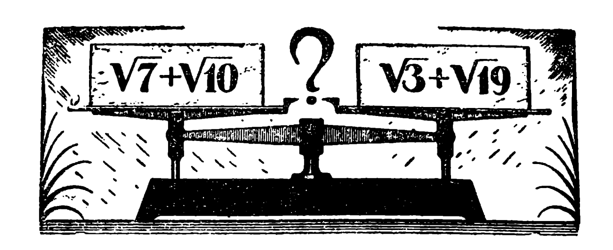
В 1909 году он выпустил сочинение, в котором предложены были им два доказательства теоремы Ферма. Его готовы были уже считать лауреатом премии, как выяснилось, что в ход его выкладок вкрались ошибки: в одном доказательстве — ошибочная подстановка, в другом — простая описка (показатель 6, вместо 5). Ошибки были обнаружены одним из русских математиков.

Необычайный в науке трюк выкинули небезызвестные немецкие математики Дюринги — отец и сын. Незадолго до империалистической войны они печатно объявили, что доказательство теоремы Ферма ими найдено, но... они не желают его оглашать.

Излишне добавлять, что подобные заявления никем не могут быть приняты серьезно.

Как бы то ни было, но премия до сих пор никому не присуждена; только из процентов, наросших на завещанный капитал, была выдана некоторая сумма двум математикам за их работы, относящиеся к рассматриваемой проблеме.

Впрочем, завещатель, очевидно, и не ожидал быстрого разрешения поставленной задачи; недаром завещание предусматривает столетний срок существования премии.



ГЛАВА ПЯТАЯ

ШЕСТОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ

ШЕСТОЕ ДЕЙСТВИЕ

Сложение и умножение имеют по одному обратному действию, которое называется вычитанием и делением. Пятое математическое действие — возвышение в степень — имеет два обратных: разыскание основания и разыскание показателя. Разыскание основания есть шестое математическое действие и называется извлечением корня. Нахождение показателя — седьмое действие — называется логарифмированием. Причину того, что возвышение в степень имеет два обратных действия, в то время как сложение и умножение — только по одному, понять не трудно: разыскание каждого из чисел, участвующего в сложении или умножении, производится одинаковыми приемами, но разыскание основания степени и ее показателя выполняется совершенно различным образом.

Шестое действие, извлечение корня, обозначается знаком $\sqrt{}$ Но все знают, что это не что иное, как видоизменение латинской буквы *r*, — начальной в слове, означающем „корень". Было время (XVI век) когда

знаком корня служила не строчная, а прописная буква R, а рядом с ней ставилась первая буква латинских слов „квадратный“ (q) или кубический (c), чтобы указать, какой именно корень требуется извлечь.[1] Например, писали

$$R.q.4352$$

вместо нынешнего обозначения

$$\sqrt{4352}.$$

Если прибавить к этому, что в ту эпоху еще не вошли в общее употребление нынешние знаки для плюса и минуса, а вместо них писали буквы $p.$ и $m.$, и что наши скобки заменяли знаками $\llcorner\ \lrcorner$, то станет ясно, какой необычный для современного глаза вид должны были иметь тогда алгебраические выражения.

Вот пример из книги старинного математика Бомбелли (1572 г.)

$$R.c.\llcorner R.q.\ 4352\ p.\ 16\lrcorner\ m.\ R.c.\llcorner R.q.\ 4352\ m.\ 16\lrcorner.$$

Мы написали бы то же самое иными знаками:

$$\sqrt[3]{\sqrt{4352}+16}-\sqrt[3]{\sqrt{4352}-16}.$$

Кроме обозначения $\sqrt[n]{a}$, теперь употребляется для того же действия еще и другое $a^{\frac{1}{n}}$, весьма удобное в смысле обобщения: оно наглядно подчеркивает, что каждый корень есть не что иное, как степень, показатель которой — дробное число. Оно предложено было замечательным голландским математиком XVI века Стевином.

---

[1] В учебнике математики Магницкого, по которому обучались у нас в течение всей первой половины XVIII века, вовсе нет особого знака для действия извлечения корня.

НАКИДКИ

Чтобы показать, как может возникнуть извлечение корня даже высоких степеней в практическом обиходе, рассмотрим следующую задачу.

Товар, прежде чем дойти до потребителя, прошел восемь учреждений, каждое из которых накидывало одинаковое число процентов к той цене, по какой само получало. В результате потребителю пришлось приобретать товар с надбавкой в 100% к первоначальной цене.

Сколько процентов накидывало каждое учреждение?

Решение

Если первоначальная цена товара a и каждое учреждение накидывало x процентов, то второе учреждение платило за товар

$$a + a\frac{x}{100} = a\left(1 + \frac{x}{100}\right),$$

третье учреждение получило товар за цену:

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right) + a\left(1 + \frac{x}{100}\right)\frac{x}{100} = a\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right).$$

Таким же образом мы найдем, что четвертое учреждение приобрело товар по цене

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right) = a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^3.$$

Восьмое — по цене

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^7.$$

А до потребителя, после восьмой накидки, товар дошел по цене

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^8$$

Из условия задачи известно, что окончательная цена была выше первоначальной на 100%, т. е. равнялась $2a$; следовательно,

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^8 = 2a, \text{ и } \left(1 + \frac{x}{100}\right)^8 = 2$$

откуда

$$1+\frac{x}{100}=\sqrt[8]{2}.$$

Чтобы вычислить $\sqrt[8]{2}$, представим этот корень в виде

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

и вычислим последовательно:

$$\sqrt{2}=1{,}41;\ \sqrt{1{,}41}=1{,}19;\ \sqrt{1{,}19}=1{,}09.$$

Значит,

$$1+\frac{x}{100}=1{,}09,\ \text{и}\ x=9.$$

Каждое учреждение накидывало 9%.

ИЗ ТЕСТОВ ЭДИСОНА

Твердое знание алгебры предполагает уверенное обращение с радикалами, прочные навыки в безошибочном их преобразовании. На практике это — умение целесообразно преобразовывать сложные выражения, содержащие радикалы, приводя их к более простому виду, весьма важно, — и не даром в числе тестов, предложенных Эдисоном юным соискателям его стипендии, [1] мы находим довольно сложную задачу этого рода.

Вот она:

Упростить выражение

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}}{\sqrt{x+1}+1}\times$$

$$\times\left[\frac{(\sqrt{x+1}+1)\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}-(\sqrt{x+1}-1)\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x+1}+1)^2}\right]$$

[1] См. примечание на стр. 66.

Решение

Займемся сначала числителем дроби, заключенной в скобки. Вынеся за скобки

$$\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

получим:

$$\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x+1}+1-\sqrt{x+1}+1)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2(x+1)^{-\frac{1}{2}}=(x+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Дробь, стоящую впереди квадратных скобок, представим в виде

$$\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$$

и умножим числителя и знаменателя этой дроби на ее числителя.

$$\frac{(\sqrt{x+1}+1)^2}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{(\sqrt{x+1}+1)^2}{(\sqrt{x+1})^2-1}=\frac{(\sqrt{x+1}+1)^2}{x}.$$

Мы привели первоначальное выражение к виду:

$$\frac{(\sqrt{x+1}+1)^2}{x}\quad\frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x+1}+1)^2}.$$

После сокращения и несложного преобразования оно упрощается в

$$\frac{1}{x\sqrt{x+1}}.$$

ЧТО БОЛЬШЕ?

Что больше: $\sqrt[5]{5}$ или $\sqrt{2}$?

Эту и следующие задачи требуется решить, **не вычисляя значения корней.**

Решение

Возвысив оба выражения в 10-ю степень, получаем

$$(\sqrt[5]{5})^{10} = 5^2 = 25; \ (\sqrt{2})^{10} = 2^5 = 32,$$

так как $32 > 25$, то

$$\sqrt{2} > \sqrt{5}.$$

Что больше: $\sqrt[4]{4}$ или $\sqrt[7]{7}$?

Решение

Возвысив оба выражения в 28-ю степень, получаем

$$(\sqrt[4]{4})^{28} = 4^7 = 2^{14} = 2^7 \quad 2^7 = 128^2$$

$$(\sqrt[7]{7})^{28} = 7^4 = 7^2 \cdot 7^2 = 49^2.$$

Так как $128 > 49$, то и

$$\sqrt[4]{4} > \sqrt[7]{7}.$$

III

Что больше: $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ или $\sqrt{3} + \sqrt{19}$?

Решение

Возвысив оба выражения в квадрат, получаем:

$$(\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 = 17 + 2\sqrt{70},$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{19})^2 = 22 + 2\sqrt{57}.$$

Уменьшим оба выражения на 17; у нас останется:

$$2\sqrt{70} \quad \text{и} \quad 5 + 2\sqrt{57}.$$

Возвышаем и эти выражения в квадрат:

$$280 \ \text{и} \ 253 + 20\sqrt{57}.$$

Отняв по 253 сравниваем

$$27 \text{ и } 20\sqrt{57}.$$

Так как $\sqrt{57}$ больше 7, то $20\sqrt{57} > 27$ и, следовательно,

$$3 + \sqrt{19} > 7 + \sqrt{10}.$$

ЧЕМУ ЭТО РАВНО?

Чему равно выражение

$$\sqrt{2\sqrt{5\sqrt{2\sqrt{5\sqrt{2\sqrt{5 \ldots}}}}}}$$

и т. д. до бесконечности.

Решение

Задача с первого взгляда кажется очень трудной, особенно в виду бесконечного числа радикалов. Однако, существует простой прием для решения подобных задач. Пусть искомая величина этого выражения есть x, тогда

$$\sqrt{2\sqrt{5x}} = x.$$

Мы получили уравнение, которое возвышаем двукратно в квадрат, чтобы освободить от радикалов:

$$2\sqrt{5x} = x^2$$

$$4 \quad 5x = x^4.$$

Так как x, очевидно, не равен 0, то мы вправе сократить последнее уравнение на x; получаем

$$20 = x^3$$

$$x = \sqrt[3]{20}.$$

Итак, величина нашего бесконечного нагромождения радикалов невелика: немного меньше 3. (Помощью таблиц логарифмов можно определить значение $\sqrt[3]{20}$ точнее: оно равно 2,71.)

Чему равно выражение

$$\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5}}}}}}\dots$$

и т. д. до бесконечности.

Решение

Поступаем как в предыдущем случае: обозначаем величину выражения через x. Тогда

$$\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5x}}}=x$$

$$3\sqrt{4\sqrt{5x}}=x^2$$

$$3^2\cdot 4\sqrt{5x}=x^4$$

$$3^4\quad 4^2\cdot 5x=x^8,$$

$$3^4\cdot 2^8\cdot 5x=x^8$$

$$3^4\cdot 2^8\cdot 5=x^7$$

$$x=2\sqrt[7]{3^4\quad 2\cdot 5}=2\sqrt[7]{810}.$$

Легко видеть, что x равен около 5 (вычисление помощью логарифмических таблиц дает более точное значение $2\sqrt[7]{810}=5{,}25$).

РЕШИТЬ ОДНИМ ВЗГЛЯДОМ

Взгляните внимательнее на уравнение

$$x^{x^3}=3$$

и скажите, чему равен x.

Решение

Всякий, хорошо освоившийся с алгебраическими символами, сообразит, что

$$x = \sqrt[3]{3}.$$

В самом деле:

$$x^3 = (\sqrt[3]{3})^3 = 3.$$

Но если

$$x^3 = 3,$$

$$x = \sqrt[3]{3}.$$

Для кого это „решение одним взглядом" является непосильным, тот может облегчить себе поиски неизвестного следующим образом:

пусть

$$x^3 = y.$$

Тогда

$$x = \sqrt[3]{y},$$

и уравнение получает вид

$$(\sqrt[3]{y})^y = 3.$$

Ясно, что $y = 3$, и следовательно

$$x = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3}.$$

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КОМЕДИИ

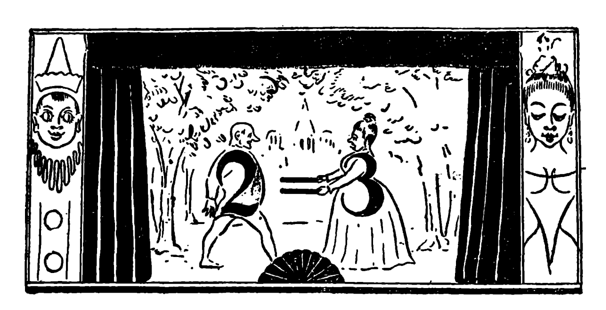
Шестое математическое действие дает возможность разыгрывать настоящие алгебраические комедии и фарсы на такие сюжеты, как „$2 \times 5 = 5$", „$2 = 3$" и т. п. Юмор подобных математических представлений кроется в том, что ошибка — довольно элементарная — несколько зама-

скирована и не сразу бросается в глаза. Исполним две пьесы этого комического репертуара из области алгебры.

„2 = 3".

На сцене сперва появляется неоспоримое равенство:

$$4 - 10 = 9 - 15.$$



В следующем „явлении" к обеим частям равенства прибавляется по равной величине $6^1/_4$:

$$4 - 10 + 6^1/_4 = 9 - 15 + 6^1/_4.$$

Дальнейший ход комедии состоит в преобразованиях:

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2.$$

Извлекая из обеих частей равенства квадратный корень, получают

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}.$$

Прибавляя по $\frac{5}{2}$ к обеим частям, приходят к нелепому равенству

$$2 = 3.$$

В чем же кроется ошибка?

Решение

Ошибка проскользнула в следующем заключении: из того, что

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$$

был сделан вывод, что

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}.$$

Но из того, что квадраты равны, вовсе не следует, что равны первые степени.

Ведь $(-5)^2 = 5^2$, но -5 не равно 5. Квадраты могут быть равны и тогда, когда первые степени разнятся знаками. В нашем примере мы имеем именно такой случай

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

но $-\frac{1}{2}$ не равна $\frac{1}{2}$.

II

Другой алгебраический фарс.

$$„2 \times 2 = 5“$$

разыгрывается по образцу предыдущего и основан на том же трюке. На сцене появляется не внушающее сомнения равенство

$$16 - 36 = 25 - 45.$$

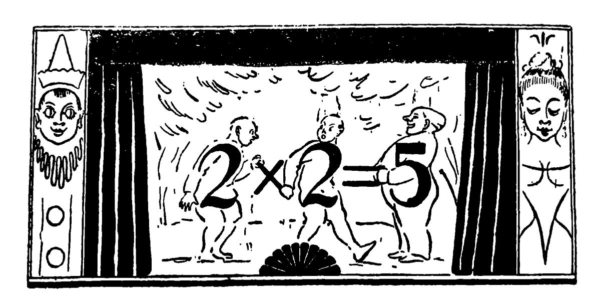
Прибавляются равные числа

$$16 - 36 + 20^1/_4 = 25 - 45 + 20^1/_4$$

и делаются следующие преобразования

$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2.$$



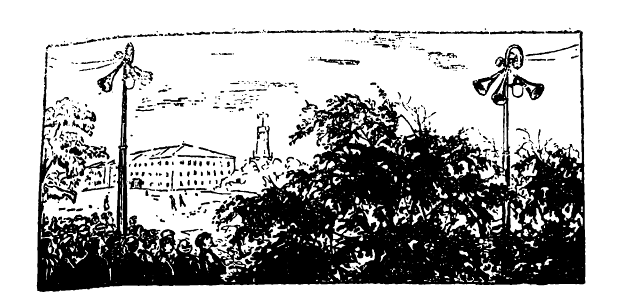
Затем, помощью того же незаконного заключения, переходят к финалу:

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$$

$$4 = 5$$

$$2 \times 2 = 5.$$

Эти комические случаи должны предостеречь малоопытного математика от неосмотрительных операций с уравнениями, содержащими неизвестное под знаком корня.



ГЛАВА ШЕСТАЯ

УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

РУКОПОЖАТИЯ

Любую задачу, приводящую к уравнению первой степени, можно решить и без уравнения, по свободному соображению. Иное дело — задачи, приводящие к уравнению второй степени: справиться с ними приемами арифметики не удается, даже если задача и вовсе не сложна. Пусть читатель попытается арифметически решить, например, такую задачу.

Участники заседания обменялись рукопожатиями, и кто-то подсчитал, что всех рукопожатий было 66. Сколько человек явилось на заседание?

Решение

Алгебраически задача решается весьма просто. Каждый из x участников пожал $x-1$ рук. Значит, всех рукопожатий должно было быть $x(x-1)$; но надо принять во внимание, что когда Иванов пожимает руку Петрова, то и Петров пожимает руку Иванова, эти два рукопо-

жатия следует считать за одно. Поэтому число пересчитанных рукопожатий вдвое меньше, нежели $x(x-1)$. Имеем уравнение

$$\frac{x(x-1)}{2}=66$$



или, после преобразований,

$$x^2-x-132=0,$$

откуда

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+528}}{2}$$

$$x_1=12;\ x_2=-11.$$

Так как отрицательное решение (—11 человек) в данном случае лишено реального смысла, мы его отбрасываем и сохраняем только первый корень: в заседании участвовало 12 человек.

Арифметически решить эту задачу можно лишь соответствующим подбором множителей числа 132: ряд проб приведет к числам 12×11.

ПЧЕЛИНЫЙ РОЙ

В древней Индии распространен был своеобразный вид спорта —публичное соревнование в решении головоломных задач. Индусские математические руководства имели отчастью целью служить пособием для подобных состязаний на первенство в умственном спорте. „По изложенным здесь правилам, — пишет составитель одного из таких учебников, — мудрый может придумать тысячу других задач. Как солнце своим блеском затмевает звезды, так и ученый человек затмит славу другого в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи". В подлиннике это выражение еще поэтичнее, так как вся книга

написана стихами. Задачи также облекались в форму стихотворений. Приведем одну из них, в прозаической передаче.

„Пчелы, в числе, равном квадратному корню из половины всего их роя, сели на куст жасмина, оставив позади себя $^8/_9$ роя. И только одна пчелка из того же роя кружится возле лотоса, привлеченная жужжанием подруги, неосторожно попавшей в западню сладко пахнущего цветка. Сколько всех пчел в рое?

Решение

Для устного решения задача не легка; она приводит к квадратному уравнению и потому не поддается разрешению арифметическими приемами. Если обозначить искомую численность роя через x, то уравнение имеет вид

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{8}{9}x+2=x.$$

Мы можем придать ему более простой вид, введя вспомогательное неизвестное

$$y=\sqrt{\frac{x}{2}}.$$

Тогда $x=2y^2$, и уравнение получится такое:

$$y+\frac{16y^2}{9}+2=2y^2, \text{ или } 2y^2-9y-18=0.$$

Решив его, получаем два значения для y:

$$y_1=6;\quad y_2=-\frac{3}{2}.$$

Соответствующие значения для x равны:

$$x_1=72;\, x_2=-4{,}5.$$

Так как число пчел должно быть целое и положительное, то удовлетворяет задаче только первый корень: рой состоял из 72 пчел. Проверим:

$$\sqrt{\frac{72}{2}}+\frac{8}{9}\cdot 72+2=6+64+2=72.$$

СТАЯ ОБЕЗЬЯН

Другую индусскую задачу я имею возможность привести в стихотворной передаче, так как ее перевел автор превосходной книжечки „Кто изобрел алгебру?“ Вас. Ив. Лебедев:

На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась;
Криком радостным двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Вместе сколько, ты мне скажешь,
Обезьян там было в роще?

Решение

Если общая численность стаи x, то

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x,$$

откуда

$$x_1=48;\quad x_2=16.$$

Задача имеет два положительных решения: в стае могло быть или 48 животных или 16. Оба ответа вполне удовлетворяют задаче.

ПРЕДУСМОТРИТЕЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ

В рассмотренных случаях мы распоряжались полученными двумя решениями уравнений различно, в зависимости от условия задачи. В первом случае мы отбро-

сили отрицательный корень, как не отвечающий содержанию задачи; во втором отказались от дробного и отрицательного корня. В третьей задаче, напротив, воспользовались обоими корнями. Существование второго решения иной раз является полной неожиданностью не только для решившего задачу, но даже и для придумавшего ее. Приведем пример, когда уравнение оказывается словно предусмотрительнее того, кто его составил.

Мяч брошен вверх со скоростью 25 метров в секунду. Через сколько секунд он будет на высоте 20 метров над землей?

Решение

Для тел, брошенных вверх, при отсутствии сопротивления атмосферы, механика устанавливает следующее соотношение между высотою поднятия (h), начальной скоростью (v), ускорением тяжести (g) и числом секунд поднятия (t);

$$h = vt - \frac{gt^2}{2}.$$

Сопротивлением атмосферы мы можем в данном случае пренебречь, так как при незначительных скоростях оно не столь велико, а мы за строгой точностью не гонимся. Ради упрощения расчетов примем g равным не 9,8 метра, а 10 м (ошибка всего в 2%). Подставив в приведенную формулу значения h, v и g, получаем уравнение:

$$20 = 25t - \frac{10t^2}{2},$$

а после упрощения

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

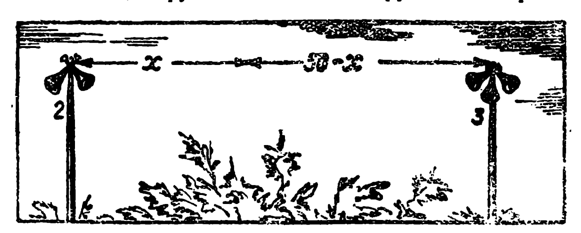
Решив уравнение, имеем

$$t_1 = 1 \quad \text{и} \quad t_2 = 4.$$

Мяч будет на высоте 20 метров дважды: через 1 секунду и через 4 секунды. Это может, пожалуй, показаться невероятным и, не вдумавшись, мы готовы второе решение отбросить. Но так поступить было бы ошибкой! Второе решение имеет полный смысл; мяч должен действительно дважды побывать на высоте 20 метров: раз при подъеме и вторично — при обратном падении. Легко рассчитать, что мяч при начальной скорости 25 м в секунду должен лететь вверх 2,5 секунд и залететь на высоту 31,25 м. Достигнув через 1 секунду высоты 20 м, мяч будет подниматься еще на 1,5 сек., затем столько же времени опускаться вниз снова до высоты 20 м и, спустя секунду, достигнет земли.

ГРОМКОГОВОРИТЕЛИ

На площади установлено пять громкоговорителей, разбитые на две группы: в одной 2, в другой 3 аппарата.



Задача о громкоговорителях.

Расстояние между группами 50 метров. Где надо стать, чтобы звуки обеих групп доносились с одинаковой силой?

Решение

Если расстояние искомой точки от меньшей группы обозначим через x, то расстояние ее от бо́льшей группы

выразится через $50-x$. Зная, что сила звука ослабевает пропорционально квадрату расстояния, имеем уравнение:

$$\frac{2}{3}=\frac{x^2}{(50-x)^2},$$

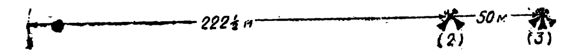
которое после упрощения приводится к виду

$$x^2+200x-5\,000=0.$$

Решив его, получаем два корня

$$x_1=22{,}5$$
$$x_2=-222{,}5.$$

Положительный корень прямо отвечает на вопрос задачи: точка равной слышимости расположена в 22,5 метрах от группы из двух громкоговорителей и, следовательно, в 27,5 метрах от группы трех аппаратов.



Две точки равной слышимости.

Но что означает отрицательный корень уравнения? Имеет ли он смысл?

Безусловно. Знак минус означает, что вторая точка равной слышимости лежит в направлении, противоположном тому, которое принято было за положительное при составлении уравнения.

Отложив от местоположения двух аппаратов в требуемом направлении 222,5 метра, мы найдем точку, куда звуки обеих групп громкоговорителей доносятся с одинаковой силой. От группы трех аппаратов точка эта от-

стоит в $222{,}5 + 50 = 272{,}5$ метра. Нетрудно убедиться, что пропорция

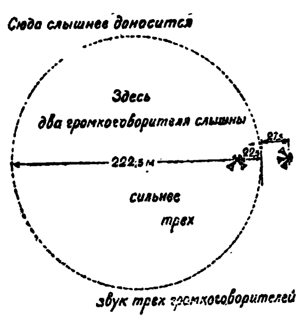
$$\frac{2}{3} = \frac{222{,}5^2}{272{,}5^2}$$

справедлива. Взяв произведение крайних членов,

$$2 \times 272{,}5^2$$

и сравнив его с произведением средних

$$3 \times 222{,}5^2,$$



К задаче о громкоговорителях.

мы получим достаточное согласие:

$$149\,000 = 149\,000.$$

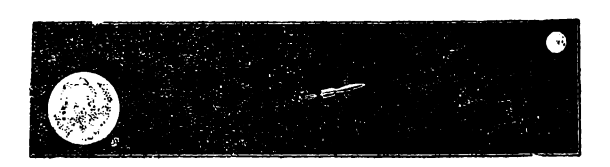
Согласие не идет далее третьей цифры — как и следовало ожидать, раз мы, решая уравнение, извлекли корень только с тремя цифрами (по числу цифр в подкоренном количестве).

Итак, нами разысканы две точки равной слышимости — из тех, что лежат на прямой, соединяющей источники звука. Других таких точек на этой линии нет, — но они имеются вне ее. В подробных курсах геометрии доказывается, что геометрическое место точек, удовлетворяющих требованию нашей задачи, есть окружность, проведенная через обе сейчас найденные точки, как через концы диаметра. Окружность эта ограничивает участок, — как видим, довольно обширный, — внутри которого слышимость группы двух громкоговорителей пересиливает

слышимость группы трех аппаратов; а за пределами круга наблюдается обратное явление.

АЛГЕБРА ЛУННОГО ПЕРЕЛЕТА

Рассмотренная сейчас задача о громкоговорителях находится в неожиданно близкой связи с проблемой перелета на Луну на ракетном корабле. Многие высказывают опасения, не окажется ли чересчур трудным делом метко попасть в такую маленькую мишень на небе: ведь поперечник Луны усматривается нами под углом всего в пол-



градуса. Ближайшее рассмотрение вопроса выясняет, что цель предприятия будет достигнута, если ракете удастся перелететь через точку равного притяжения Земли и Луны, — дальше ракетный корабль уже неизбежно должен двигаться к Луне под действием ее притяжения. Разыщем эту точку равного притяжения.

Решени

По закону Ньютона, сила взаимного притяжения двух тел прямо пропорциональна произведению притягивающихся масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Если масса Земли M, а расстояние

ракеты от нее x, то сила, с какою Земля притягивает каждый грамм массы ракеты, выразится через

$$\frac{Mk}{x^2}$$

где k — сила взаимного притяжения одного грамма одним граммом на расстоянии в 1 см.

Сила, с какой Луна притягивает каждый грамм ракеты, в той же точке равна

$$\frac{mk}{(l-x)^2}$$

где m — масса Луны, а l — ее расстояние от Земли (ракета предполагается между Землей и Луной, на линии, соединяющей их центры). Задача требует, чтобы

$$\frac{Mk}{x^2} = \frac{mk}{(l-x)^2}\,.$$

$$\frac{M}{m} = \frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2}\,.$$

Отношение $\frac{M}{m}$ равно — как известно из астрономии — 81,6; подставив, имеем:

$$\frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2} = 81{,}6,$$

откуда:

$$80{,}6x^2 - 163{,}2lx + 81{,}6l^2 = 0.$$

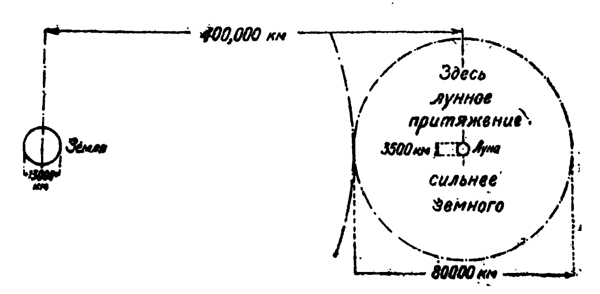
Решив уравнение относительно x, получаем

$$x_1 = 0{,}9l; \quad x_2 = 1{,}11l.$$

Как и в задаче о громкоговорителях, мы приходим к заключению, что на линии Земля — Луна существуют две

искомые точки, — две точки, где ракета должна одинаково притягиваться обоими светилами; одна на 0,9 расстояния между ними, считая от центра Земли, другая — на 1,11 того же расстояния. Так как расстояние l между центрами Земли и Луны = 384 000 километров, то одна из искомых точек отстоит от Земли на 342 000 км, другая — на 426 000 км.

Но мы знаем (см. предыдущую задачу), что тем же свойством обладают и все точки окружности, проходя-



К задаче о лунном перелете.

щей через найденные две точки, как через концы диаметра. А если эту окружность повернем около линии, соединяющей центры Земли и Луны, мы получим шаровую поверхность, все точки которой будут удовлетворять требованиям задачи.

Диаметр этого шара равен, как легко сообразить,

$$0{,}1l + 0{,}11l = 0{,}21l = 80\,000 \text{ км}.$$

Если ракета очутится внутри этого шара (обладая незначительной скоростью), она неизбежно должна будет упасть на лунную поверхность, так как сила лунного

притяжения в этой области превозмогает силу притяжения Земли,

Мишень, в которую должна попасть ракета, мы видим, гораздо больше, чем можно думать. Она занимает на небе не полградуса, а — как показывает несложный геометрический расчет — около 12°. Это значительно облегчает задачу звездоплавателей. [1]

На этот раз уравнение оказалось словно прозорливее того, кто его составлял. Приступая к задаче, разве думали вы, что земное притяжение сильнее лунного не только впереди Луны, но и позади нее? Алгебраический анализ неожиданно раскрыл вам это обстоятельство и помог в точности разграничить сферы влияния обоих светил.

„ТРУДНАЯ ЗАДАЧА"

Картина Богданова-Бельского „Трудная задача" известна многим (она воспроизведена в „Занимательной арифметике" изд. 1932 г.), но мало кто из видевших эту картину вникал в содержание той „трудной задачи", которая на ней изображена. Состоит она в том, чтобы устным счетом быстро найти результат вычисления

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}$$

Задача в самом деле не легкая. С нею, однако, хорошо справлялись ученики того учителя, который с сохранением портретного сходства изображен на картине, именно С. А. Рачинского, профессора естественных наук, покинувшего университетскую кафедру, чтобы сделаться

[1] На подробностях проектов лунных перелетов мы здесь, конечно, останавливаться не можем. Интересующиеся этой проблемой найдут ее изложение и разбор связанных с ней математических вопросов в моей книге „Межпланетные путешествия", изд. 7, 1932 г.

рядовым учителем сельской школы. Талантливый педагог культивировал в своей школе устный счет, основанный на виртуозном использовании свойств чисел. Числа 10, 11, 12, 13 и 14 обладают любопытной особенностью, которая была хорошо известна юным питомцам Рачинского, а именно

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

Так как левая часть равна $100 + 121 + 144 = 365$, то легко расчитать в уме, что изображенное на картине выражение равно 2.

Алгебра дает нам средство поставить вопрос об этой интересной особенности ряда чисел более широко: единственный ли это ряд из пяти последовательных чисел, сумма квадратов первых трех из которых равна сумме квадратов двух последних?

Решение

Обозначив первое из искомых чисел через x, имеем уравнение:

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2 + (x+4)^2.$$

Удобнее, впрочем, обозначить через x не первое, а **второе** из искомых чисел. Тогда уравнение будет иметь вид:

$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2 + (x+3)^2.$$

Раскрыв скобки и сделав упрощения, получаем:

$$x^2 - 10x - 11 = 0,$$

откуда

$$x = 5 \pm \sqrt{25 + 11}; \quad x_1 = 11; \quad x_2 = -1.$$

Существует, следовательно два ряда чисел, обладающих требуемым свойством: ряд Рачинского

$$10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14$$

и ряд

$$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2.$$

В самом деле:

$$(-2)^2+(-1)^2+0^2=1^2+2^2.$$

СУММА КУБОВ

С рассмотренной сейчас задачей сходна следующая.

Найти четыре таких последовательных числа, куб последнего из которых равен сумме кубов трех предыдущих.

Решение

В этом случае уравнение получается более простого вида, если через x обозначить **первое** из искомых чисел:

$$(x+1)^3+(x+2)^3=(x+3)^3$$

Раскрыв скобки и сделав приведение, получаем:

$$x^3-6x-9=0$$

Мы имеем уравнение **третьей** степени, которое, однако, можно привести к квадратному. Для этого представим его в виде

$$x^3-9x+3x-9=0$$

и преобразуем так:

$$x(x^2-9)+3(x-3)=0$$

$$x(x+3)(x-3)+3(x-3)=0$$

$$(x-3)[x(x+3)+3]=0$$

$$(x-3)(x^2+3x+3)=0$$

Произведение двух множителей может равняться нулю, когда один из них или оба равны нулю, т. е. когда

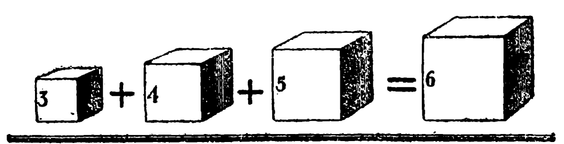
$$x-3=0 \quad \text{и} \quad x^2+3x+3=0.$$

Из первого уравнения следует, что $x=3$: это один корень кубического уравнения. Два другие найдем, решив уравнение

$$x^2+3x+3=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-12}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{-3}}{3}$$

Так как корень квадратный из отрицательного числа есть величина мнимая, то два последних корня прихо-



дится отбросить. Задача, следовательно, имеет только одно решение, а именно 3, 4, 5 и 6:

$$3^2+4^2+5^2=6^2$$

Это означает, между прочим, что куб, ребро которого 6 сантиметров, равновелик сумме трех кубов, ребра которых равны 3 см, 4 см и 5 см — соотношение, которое, по преданию, весьма занимало Платона.

КАКИЕ ЧИСЛА?

Найти три последовательных числа, отличающихся тем свойством, что квадрат среднего на 1 больше произведения двух остальных.

Решение

Если первое из искомых чисел x, то уравнение имеет вид:

$$(x+1)^2 = x(x+2)+1.$$

Раскрыв скобки, получаем

$$x^2+2x+1 = x^2+2x+1,$$

или $0=0$, — равенство, из которого нельзя определить величину x. Оно показывает, что составленное нами равенство есть тождество; оно справедливо при любом значении входящих в него букв, а не при некоторых лишь, как в случае уравнений. Это значит, что всякие три последовательных числа обладают требуемым свойством. В самом деле, возьмем наугад числа

17, 18, 19.

Мы убеждаемся, что

$$18^2 - 17.19 = 324 - 323 = 1$$

Необходимость такого соотношения выступает нагляднее, если обозначить через x второе число. Тогда получим равенство

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1),$$

т. е. очевидное тождество.

ЗАМЫСЛОВАТАЯ СИСТЕМА

Система двух квадратных уравнений с двумя неизвестными вообще говоря приводит к уравнению четвертой степени, которое неразрешимо средствами школьного курса алгебры. Но некоторые системы удается так преобразовать, что они легко поддаются разрешению элементарными приемами. К каким ухищрениям приходится

иногда прибегать при этом, показывает следующая задача, предлагавшаяся на конкурсных экзаменах в высших школах дореволюционного времени.

Решить систему:

$$\begin{cases} x^2 + y = 7 \\ x + y^2 = 11 \end{cases}$$

Решение

Вычтя из второго уравнения первое, получаем:

$$x + y^2 - x^2 - y = 4$$

Делаем преобразования:

$$y^2 - x^2 - (y - x) = 4$$
$$(y - x)\ (y + x) - (y - x) = 4$$
$$(y - x)\ (y + x - 1) = 4.$$

Нетрудно сообразить, что множители $y - x$ и $y + x - 1$, дающие в произведении целое число 4, могут быть лишь числа целые (число 4 может быть получено и от умножения целого на дробь, но тогда разность и сумма выражений $y - x$ и $y + x - 1$ были бы числами дробными, произведение которых не может быть целым). Эти целые числа надо выбрать из следующих:

2 и 2; −2 и −2; 4 и 1; −4 и −1; 1 и 4; −1 и −4.

Другими словами

$y - x$ могло бы равняться 2, −2, 4, −4, 1, −1 и тогда $y + x - 1$ было бы равно 2, −2, 1, −1, 4, −4.

Какие же пары удовлетворяют последнему уравнению? Перепробовав их все, убеждаемся, что корнями уравнения могут быть только числа 1 и 4.

$$y - x = 1$$
$$y + x - 1 = 4$$

Сложив эти уравнения, а затем вычтя второе из первого, получаем

$$y = 3; \ x = 2.$$

Это и есть решения нашей замысловатой системы. Действительно:

$$2^2 + 3 = 7$$

$$2 + 3^2 = 11$$

Как видите, мы отчасти прибегли в этом случае к приемам, которыми пользуются при решении неопределенных уравнений.

ДВА ПОЁЗДА

Два железнодорожных пути скрещиваются под прямым углом. К месту скрещения одновременно мчатся по этим путям два поезда: один от станции, находящейся в 40 километрах от скрещения, другой — от станции в 50 км от того же места скрещения. Первый делает в минуту 800 метров, второй — 600 м.

Через сколько минут, считая с момента отправления, паровозы были в наименьшем взаимном расстоянии? И как велико это расстояние?

Решение

Эта и следующие задачи принадлежат к весьма интересному роду упражнений — на разыскание наибольшей или наименьшей величины. Они могут быть решены различными приемами, один из которых мы сейчас покажем.

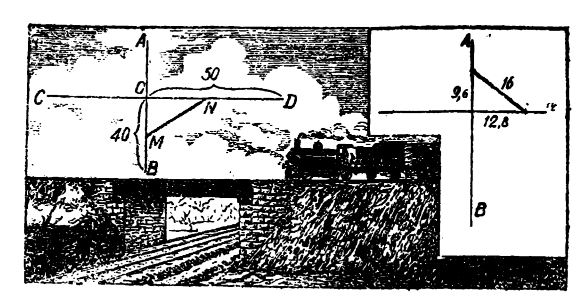
Начертим схему движения поездов нашей задачи. Пусть прямые AB и CD — скрещивающиеся пути (рис. на стр. 157). Станция B расположена в 40 км от точки скрещения O, станция D — в 50 км от нее. Предположим, что спустя x минут паровозы будут в кратчайшем вза-

имном расстоянии друг от друга $MN = m$. Поезд, вышедший из B, успел к этому моменту пройти путь $BM = 0,8x$, так как его минутная скорость равна 800 м = 0,8 км. Следовательно, $OM = 40 - 0,8\ x$. Точно так же найдем, что $ON = 50 - 0,6x$. По теореме Пифагора

$$MN = m = \sqrt{OM^2 + ON^2} = \sqrt{(40 - 0,8\,x)^2 \quad (50 - 0,6x)^2}$$

Возвысив в квадрат обе части уравнения

$$m = \sqrt{(40 - 0,8x)^2 + (50 - 0,6x)^2}$$



Задача о двух поездах.

и сделав упрощения, получаем

$$x^2 - 124x + 4100 - m^2 = 0$$

Решив это уравнение относител

$$x = 62 \pm \sqrt{m^2 - 256}.$$

Так как x — число прошедших минут — не может быть мнимым, то $m^2 - 256$ должно быть величиной положитель-

ной, или, в крайнем случае, равняться нулю. Последнее соответствует наименьшему значению m, и тогда

$$m^2 = 256, \text{ т. е. } m = 16,$$

Очевидно, что меньше 16-ти m быть не может, — иначе x становится мнимым. А если $m^2 - 256 = 0$, то $x = 62$.

Итак, паровозы окажутся всего ближе друг к другу через 62 минуты, и взаимное их удаление тогда будет 16 километров.

Определим, как они в этот момент расположены. Вычислим длину OM; она равна

$$40 - 62.0,8 = -9,6,$$

Знак минус означает, что паровоз пройдет за скрещение на 9,6 км. Расстояние же ON равно

$$50 - 62.0,6 = 12,8,$$

т. е. второй паровоз не дойдет до скрещения на 12,8 км. Расположение паровозов показано на черт. стр. 157, вправо. Как видим, оно вовсе не то, которое мы представляли себе до решения задачи. Уравнение оказалось достаточно терпимым и, несмотря на неправильную схему, дало правильное решение. Нетрудно понять, откуда эта терпимость: она обусловлена алгебраическим знакоположением.

ГДЕ УСТРОИТЬ ПОЛУСТАНОК?

В стороне от прямолинейного участка железнодорожного пути, в 20 километрах от него, лежит селение B. Где надо устроить полустанок C, чтобы проезд от A до B по железной дороге AC и по шоссе CB отнимал возможно меньше времени? Скорость движения по железной дороге 0,8 километра в минуту, по шоссе — 0,2 км

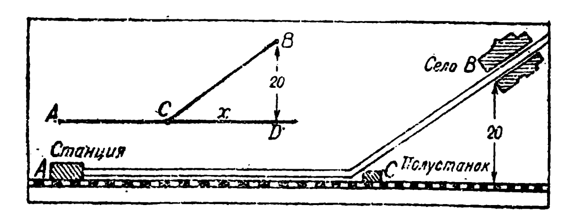
Решение

Обозначим расстояние AD (от A до основания перпендикуляра BD к AD) через a, CD через x. Тогда $AC = AD - CD = a - x$, а $CB = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{x^2 + 20^2}$. Время, в течение которого поезд проходит путь AC, равно

$$\frac{AC}{0{,}8} = \frac{a - x}{0{,}8}$$

Время прохождения пути CB по шоссе равно

$$\frac{CB}{0{,}2} = \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0{,}2}$$



Задача о полуста

А общая продолжительность переезда из A в B равна

$$\frac{a - x}{0{,}8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0{,}2}$$

Эта сумма, которую обозначим через m, — должна быть наименьшей.

Уравнение

$$\frac{a - x}{0{,}8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0{,}2} = m$$

представляем в виде

$$-\frac{x}{0,8}+\frac{\sqrt{x^2+20^2}}{0,2}=m-\frac{a}{0,8}$$

Умножив на 0,8, имеем:

$$-x+4\sqrt{x^2+20^2}=0,8\,m-a.$$

Обозначив $0,8m-a$ через k и освободив уравнение от радикала, получаем квадратное уравнение

$$15x^2-2kx+6400-k^2=0$$

откуда

$$x=\frac{k\pm\sqrt{16k^2-96000}}{15}$$

Так как $k=0,8m-a$, то при наименьшем значении m достигает наименьшей величины и k, и наоборот. Но чтобы x было вещественным, $16\,k^2$ должно быть не меньше 96000. Значит, наименьшая величина для $16k^2$ есть 96000. Поэтому m становится наименьшим, когда

$$16\,k^2=96000,$$

откуда $$k=\sqrt{6000},$$

и следовательно,

$$x=\frac{k\pm 0}{15}=\frac{\sqrt{6000}}{15}=5,16.$$

Полустанок должен быть устроен в 5,16 км от точки D, какова бы ни была длина $a=AD$.

Но, разумеется, наше решение имеет смысл только для случаев, когда $x<a$, так как, составляя уравнение, мы считали выражение $a-x$ за число положительное.

Если $x=a=5,16$, то полустанка вообще строить не надо; придется ехать прямо на станцию. Так же нужно поступать и в случаях, когда расстояние a короче 5,16 км.

На этот раз мы оказываемся предусмотрительнее, нежели уравнение. Если бы мы слепо доверились уравнению нам пришлось бы в рассматриваемом случае построить полустанок по другую сторону от станции, — что было бы явной нелепостью: никто не минует станции, когда спешит попасть на поезд. Случай поучительный, показывающий, что при пользовании математическим орудием надо с должной осмотрительностью относиться к получаемым результатам: логика реальной действительности не всегда полностью совпадает с логикой того математического уравнения, в которое мы облекаем жизненные явления.

КАК ПРОВЕСТИ ШОССЕ?

Из приречного города A надо направлять грузы в пункт B, расположенный на a километров ниже по реке и в d километрах от берега. Как провести шоссе от B к реке, чтобы провоз грузов из A в B обходился возможно дешевле?

Провозная плата с тонно-километра по реке вдвое меньше, чем по шоссе.

Решение

Обозначим расстояние AD через x, длину DB шоссе — через y, длину AC — через a, BC — через d.

Так как провоз по шоссе вдвое дороже, чем по реке, то сумма

$$x + 2y$$

должна быть, согласно требованию задачи, наименьшая. Обозначим это наименьшее значение через m. Имеем уравнение

$$x + 2y = m.$$

Но $x = a - DC$, а $DC = \sqrt{y^2 - d^2}$, наше уравнение получает вид:

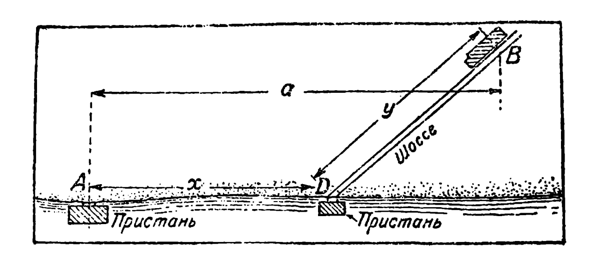
$$a - \sqrt{y^2 - d^2} + 2y = m,$$

или, по освобождении от радикала,

$$3y^2 + 4(a - m)\,y + (a - m)^2 + d^2 = 0.$$

Решаем его:

$$y = 2(a - m) \pm \sqrt{\frac{(a - m)^2 - 3d}{3}}$$



Задача о шоссе.

Чтобы y было вещественным, $(a - m)^2$ должно быть не меньше $3d^2$. Наименьшее значение $(a - m)^2$ равно $3d^2$, и тогда

$$a - m = d\sqrt{3};\quad y = \frac{2(a - m) + 0}{3} = \frac{2d\sqrt{3}}{3}$$

Sin угла $BDC = d : y$, т. е.

$$d : \frac{2d\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Но угол, синус которого $= \frac{3}{2}$, заключает 60°. Значит, шоссе надо провести под углом в 60° к реке, — каково бы ни было расстояние AC.

Здесь мы наталкиваемся снова на ту же особенность, с которой мы встретились в предыдущей задаче. Решение имеет смысл только при определенном условии. Если пункт расположен так, что шоссе, проведенное под углом в 60° к реке, пройдет по ту сторону города A, то решение неприложимо; в таком случае надо непосредственно связать пункт B с городом A шоссе, вовсе не пользуясь рекой для перевозки.

КОГДА ПРОИЗВЕДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕЕ?

Для решения многих задач „на максимум и минимум", т. е. на разыскание крайних значений переменной величины, можно успешно пользоваться одной алгебраической теоремой, с которой мы сейчас познакомимся. Рассмотрим задачу:

На какие две части надо разбить данное число, чтобы произведение их было наибольшее?

Решение

Пусть данное число a, и одна из частей, на которые мы разбили наше число, есть x. Произведение обеих частей обозначим через m

$$x(a-x)=m.$$

Чтобы определить, при каком значении x величина m наибольшая, решим это уравнение относительно x:

$$x=\frac{a \pm \sqrt{a^2-4m}}{2}.$$

Наибольшая величина $4m$ есть a^2, т.

$$4m = a^2; \text{ тогда } m = \frac{a^2}{4}, \text{ и } x = \frac{a}{2}$$

Итак, число надо разделить пополам: произведение двух чисел, сумма которых неизменна, будет наибольшим тогда, когда эти числа равны между собой.

Рассмотрим ту же задачу для трех чисел.

На какие три части надо разбить данное число, чтобы произведение их было наибольшее?

Решение

При решении этой задачи будем опираться на предыдущую. Пусть три части, на которое разбито данное число, x, y, z, само же число обозначим через a. Имеем

$$x + y + z = a$$

Допустим, что x и y не равны между собой. Если каждое из них заменим их полусуммой $\frac{x+y}{2}$, то сумма трех множителей не изменится:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + z = x + y + z = a.$$

Но мы уже знаем, что произведение равных множителей, при неизменной сумме, больше произведения неравных, т. е.

$$\frac{x+y}{2} \; \frac{x+y}{2} > xy.$$

Поэтому

$$\frac{x+y}{2} \; \frac{x+y}{2} \; z > xyz$$

Вообще, если среди множителей xyz есть хотя бы два неравных, то можно подобрать числа, которые, не меняя общей суммы, дадут большее произведение, чем xyz. И только при равенстве множителей произвести такой замены нельзя: произведение трех равных множителей, при неизменной сумме, наибольшее.

Подобным же образом можно доказать эту теорему и для четырех множителей, для пяти и т. д.

Рассмотрим теперь более общий случай.

Найти, при каких значениях x и y выражение $x^p y^q$ наибольшее, если $x+y=a$.

Решение

Надо найти, при каком x выражение

$$x^p (a-x)^q$$

достигает наибольшей величины.

Умножим его на число $\left(\frac{q}{p}\right)^p$. Получим выражение

$$\left(\frac{q}{p}\right)^p x^p \left(a-x\right)^q,$$

которое, очевидно, достигает наибольшей величины тогда же, когда и $x^p (a-x)^q$.

Представим его в таком виде:

$$\left(\frac{q}{p}x\right)^p \left(a-x\right)^p = \underbrace{\frac{q}{p}x \cdot \frac{q}{p}x \cdot \frac{q}{p}x}_{p \text{ раз}} \cdot \ \ldots$$

$$\underbrace{\ldots \left[(a-x) \cdot (a-x) \cdot a-x) \ldots\right]}_{q \text{ раз}}$$

Сумма всех множителей этого произведения равна:

$$\underbrace{\frac{q}{p}x + \frac{q}{p}x + \frac{q}{p}x + \ldots +}_{в \text{ раз}}$$

$$+\underbrace{(a-x)+(a-x)+(a-x)+\quad\ldots}_{q\text{ раз}}=$$

$$=p\frac{q}{p}x+q(a-x)=qx+qa-qx=qa$$

Так как числа q и a — постоянные, то сумма всех множителей произведения

$$\left(\frac{q}{p}x\right)^{p}\left(a-x\right)^{p}$$

есть величина постоянная. На основании ранее доказанного мы заключаем, что произведение это достигает максимума при равенстве его множителей, т. е. когда

$$\frac{q}{p}x=a-x=y;$$

отсюда:

$$\frac{x}{y}=\frac{p}{q}$$

Итак, произведение $x^p y^q$ при постоянстве суммы $x+y$ наибольшее, когда

$$x:y=p:q.$$

Таким же образом можно доказать, что произведения

$$x^p\ y^q\ z^r,\qquad x^p\ y^q\ z^r\ t^u\qquad \text{и т. п.}$$

при постоянстве сумм $x+y+z$, $x+y+z+t$ и т. д. достигает наибольшей величины тогда, когда

$x:y:z=p:q:$ $\quad$ $x:y:z:t=p:q:$ $\quad$ u $\quad$ и т. д.

КОГДА СУММА НАИМЕНЬШАЯ?

Читатель, желающий испытать свои силы на доказательстве полезных алгебраических теорем, пусть докажет сам следующие положения:

1. Сумма двух чисел, произведение которых неизменно, становится **наименьшей**, когда эти числа равны.

Например, для произведения 36: $4+9=13$; $3+12=15$; $2+18=20$; $1+36=37$; и наконец: $6+6=12$.

2. Сумма нескольких чисел, произведение которых неизменно становится наименьшей, когда числа эти равны.

Например, для произведения 216, $3+12+6=21$; $2+18+6=24$; $9+6+4=19$, между тем как $6+6+6=18$.

На ряде примеров покажем, как применяются на практике эти теоретические положения.

БРУС НАИБОЛЬШЕГО ОБЪЕМА

Из цилиндрического бревна надо выпилить прямоугольный брус наибольшего объема. Какой формы должно быть его сечение?

Решение

Если стороны прямоугольного сечения x и y, то по теореме Пифагора

$$x^2+y^2=d^2,$$

где d—диаметр бревна. Объем бруса наибольший, когда площадь его сечения наибольшая, т. е. когда xy достигает наибольшей величины. Но если xy наибольшая, то наибольшим будет и произведение x^2y^2. Так как сумма x^2+y^2 неизменна, то произведение x^2y^2 наибольшее, когда $x^2=y^2$, или $x=y$.



Итак, сечение бруса должно быть **квадратное**.

ДВА ЗЕМЕЛЬНЫХ УЧАСТКА

1. Какой формы должен быть прямоугольный участок данной площади, чтобы длина его изгороди была наименьшая?

2. Какой формы должен быть прямоугольный участок, чтобы при данной длине изгороди площадь его была наибольшая?

Решения

1. Форма прямоугольного участка определяется соотношением его сторон x и y. Площадь участка со сторонами x и y равна xy, а длина изгороди $2x+2y$. Длина изгороди будет наименьшей, если $x+y$ достигнет наименьшей величины.

При постоянном произведении xy сумма $x+y$ наименьшая в случае равенства $x=y$. Следовательно, искомый прямоугольник—квадрат.

2. Если стороны прямоугольника x и y, то длина изгороди $2x+2y$, а площадь xy. Это произведение будет наибольшим тогда же, когда и произведение $4xy$, т. е. $2x \cdot 2y$; последнее же произведение—при постоянной сумме его множителей $(2x+2y)$ — становится наибольшим при $2x=2y$, т. е. когда участок имеет форму квадрата.

К известным нам из геометрии свойствам квадрата мы можем, следовательно, прибавить еще следующее: из всех прямоугольников он обладает наименьшим периметром при данной площади и наибольшей площадью при данном периметре.

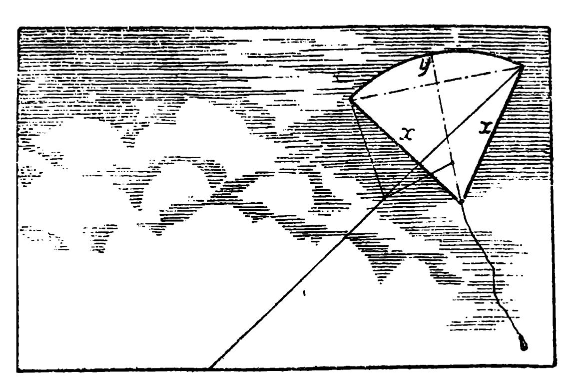
(В сущности это не два свойства, а одно, так как всякое изменение периметра прямоугольника сопровождается изменением его площади и обратно.)

БУМАЖНЫЙ ЗМЕЙ

Змею в виде сектора желают придать такой фасон, чтобы он вмещал в данном периметре наибольшую площадь. Какова должна быть форма сектора?

Решение

Уточняя требование задачи, мы должны разыскать, при каком соотношении длины дуги сектора и его радиуса



Задача о бумажном змее.

площадь его достигает наибольшей величины при данном периметре.

Если радиус сектора x, а дуга y, то его периметр l и площадь S выразятся так:

$$l = 2x + y; \qquad S = \frac{xy}{2} = \frac{x(l-2x)}{2}.$$

Величина S достигает максимума при том же значении x, как и произведение

$$2x(l-2x),$$

т. е. учетверенная площадь. Так как сумма множителей

$$2x+(l-2x)=l,$$

т. е. величина постоянная, то произведение их наибольшее, когда

$$2x=l-2x$$

откуда

$$x=\frac{l}{4}; \qquad y=l-2\cdot\frac{l}{4}=\frac{l}{2}$$

Итак, сектор при данном периметре замыкает наибольшую площадь в том случае, когда его радиус составляет половину дуги (т. е. длина его дуги равна сумме радиусов, или длина кривой части его периметра равна длине прямолинейной). Каковы летные качества такого широкого змея,—вопрос другой, рассмотрение которого в нашу задачу не входит.

ПОСТРОЙКА ДОМА

На месте разрушенного дома, от которого одна стена уцелела, желают построить новый. Длина уцелевшей стены — 12 метров. Площадь нового дома должна равняться 112 кв. метрам. Хозяйственные условия работы таковы:

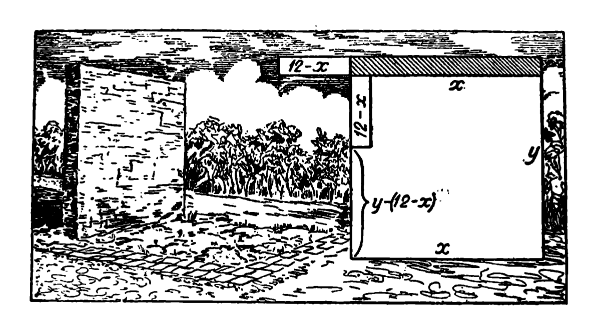
1) ремонт погонного метра стены обходится в 25% стоимости кладки новой;

2) разбор пог. метра старой стены и кладка из полученного материала новой стены стоит 50% того, во что обходится постройка пог. метра стены из нового материала.

Как при таких условиях наивыгоднейшим образом использовать уцелевшую стену?

Решен

Пусть от прежней стены сохраняется x метров, а остальные $12 - x$ метров разбираются, чтобы из полученного материала возвести заново часть стены нового дома (см. рис.). Если стоимость кладки пог. метра стены из нового материала a, то ремонт x метров старой стены будет стоить $\frac{ax}{4}$; возведение участка длиною $12 - x$ обойдется



Задача о постройке дома.

$\frac{a(12-x)}{2}$; прочей части этой стены $a[y-(12-x)]$, т. е. $a(y+x-12)$; третьей стены — ax, четвертой — ay. Вся работа обойдется

$$\frac{ax}{4} + \frac{a(12-x)}{2} + a(y+x-12) + ax + ay = \frac{a(7x+8y)}{4}.$$

Последнее выражение достигает наименьшей величины тогда же, когда и сумма

$$7ax + 8ay.$$

Мы знаем, что площадь дома, xy, равна 112; следовательно

$$7ax \cdot 8ay = 112 \cdot 56a^2.$$

При постоянном произведении сумма $7ax + 7ay$ достигает наименьшей величины тогда, когда

$$7ax = 8ay,$$

откуда

$$y = \frac{7}{8}x.$$

Подставив это выражение для y в уравнение

$$xy = 112,$$

имеем

$$\frac{7}{8}x^2 = 112, \qquad x = \sqrt{128} = 11{,}3$$

А так как длина старой стены 12 метров, то подлежит разборке только 0,7 метра этой стены.

Читатель может самостоятельно убедиться, что решение не изменится, если из материала разобранной стены класть другую стену.

ЖОЛОБ НАИБОЛЬШЕГО СЕЧЕНИЯ

Прямоугольный металлический лист (рис. на стр. 73) надо согнуть жолобом с сечением в форме равнобокой трапеции. Это можно сделать различными способами, как видно из чертежа. Какой ширины должны быть боковые полосы и под каким углом они должны быть отогнуты, чтобы сечение жолоба имело наибольшую площадь?

Решение

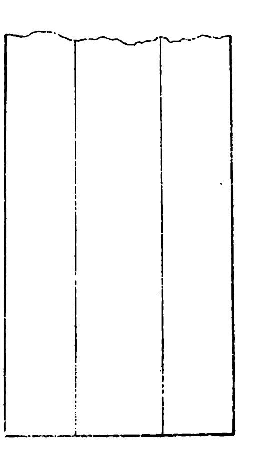
Пусть ширина листа l. Ширину отгибаемых боковых полос обозначим через x, а ширину дна жолоба — че-

рез y. Введем еще одно неизвестное z, значение которого ясно из рисунка на стр. 174.

Площадь S трапеции, представляющей сечение желоба, равна

$$S = \frac{(z+y+z)+y}{2}\sqrt{x^2-z^2} = \sqrt{(y+z)^2(x^2-z^2)}.$$

Задача свелась к определению тех значений x, y, z, при которых величина S достигает наибольшей величины; при этом сумма $2x+y$ (т. е. ширина листа) сохраняет постоянную величину l. Делаем преобразования:



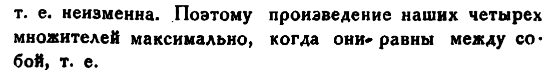
$$S^2 = (y+z)^2(x+z)(x-z).$$

S^2 становится наибольшим при тех же значениях x, y, z, как и $3S^2$, последнее же достигает максимума одновременно с выражением

$$(y+z)(y+z)(x+z)(3x-3z).$$

Сумма этих четырех множителей

$$y+z+y+z+x+\\+z+3x-3z=2y+4x=2l,$$

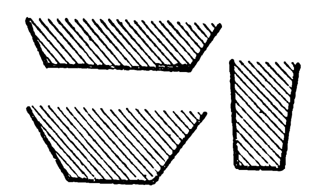


т. е. неизменна. Поэтому произведение наших четырех множителей максимально, когда они равны между собой, т. е.

$$y+z=x+z \qquad y+z=3x-3z.$$

Из первого уравнения имеем

$$y = x,$$



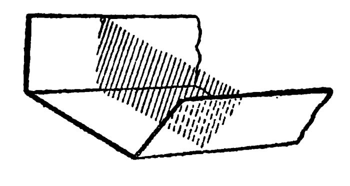
а так как $y + 2x = l$, то

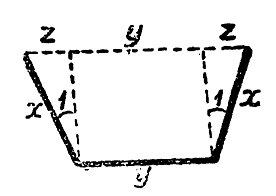
$$x = y = \frac{l}{3}.$$

Из второго уравнения находим

$$z = \frac{x}{2} = \frac{l}{6}.$$

Далее, так как катет z равен половине гипотенузы x см. рисунок), то противолежащий угол $1 = 30°$, а угол





наклона боков жолоба ко дну $= 90 + 30 = 120°$.

Итак, жолоб будет иметь наибольшее сечение, когда грани его согнуты в форме трёх смежных сторон правильного шестиугольника.

ВОРОНКА НАИБОЛЬШЕЙ ВМЕСТИМОСТИ

Из жестяного круга нужно изготовить коническую часть воронки. Для этого в круге вырезают сектор и остальную часть круга свертывают конусом. Сколько градусов должно быть в дуге сектора, чтобы конус получился наибольшей вместимости?

Решение

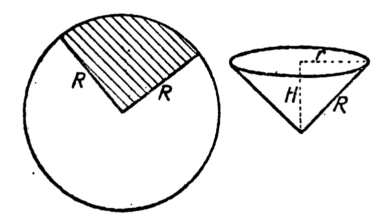
Длину дуги той части круга, которая свертывается в конус, обозначим через x (в линейных мерах). Следо-

вательно, образующей конуса будет радиус R жестяного круга, а окружностью основания — x. Радиус r основания конуса определяем из равенства

$$2\pi r = x; \quad r = \frac{x}{2\pi}.$$

Высота H конуса равна (по теореме Пифагора, (см. рисунок)

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}.$$



Задача о воронке

Объем V этого конуса равен

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 H = \frac{\pi}{3}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}.$$

Это выражение достигает наибольшей величины одновременно с выражением

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$$

и его квадратом

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4 \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right].$$

Так как

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = R^2$$

есть величина постоянная, то последнее произведение имеет максимум при том значении x, когда

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 : \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right] = 2 : 1\ ,$$

откуда

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 - 2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$$

$$3\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 \quad \text{и} \quad x = \frac{2\pi}{3} R\sqrt{6} = 5{,}14R\,.$$

В градусах дуга $x = 294°$ и, значит, дуга вырезаемого сектора должна содержать $66°$.

САМОЕ ЯРКОЕ ОСВЕЩЕНИЕ

На какой высоте над столом должно находиться пламя свечи, чтобы всего ярче освещать лежащую на столе монету?

Решение

Может показаться, что для достижения наилучшего освещения надо поместить пламя возможно ниже, — но это неверно: при низком положении пламени лучи падают очень отлого. Поднять свечу так, чтобы лучи падали круто, — значит удалить источник света. Наиболее выгодна в смысле освещения, очевидно, некоторая средняя высота пламени над столом. Обозначим ее через x (рис. на стр. 177). Расстояние BC монеты B от основания C перпендикуляра, проходящего через пламя A, обозначим

через α. Если яркость пламени i, то освещенность монеты, согласно законам оптики, выразится так:

$$\frac{i}{AB^2}\cos\alpha = \frac{i\cos\alpha}{(\sqrt{a^2+x^2})^2} = \frac{i\cos\alpha}{a^2+x^2},$$

где α — угол падения пучка лучей AB. Так как

$$\cos\alpha = \cos A = \frac{x}{AB} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

то освещенность равна

$$\frac{i}{a^2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{ix}{(a^2+x^2)^{3/2}}.$$

Это выражение достигает максимума при том же значении α, как и его квадрат, т. е.

$$\frac{i^2x^2}{(a^2+x^2)^3}.$$

Задача об освещении.

Множитель i^2, как величину постоянную, опускаем, а остальную часть исследуемого выражения преобразуем так

$$\frac{x^2}{(a^2+x^2)^3} = \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right) = $$

$$= \left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right),$$

потому что

$$1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2} = \frac{x^2}{x^2 + a^2}.$$

Преобразованное выражение достигает максимума одновременно с выражением

$$\left(\frac{a^2}{x^2 + a^2}\right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2}\right),$$

так как введенный постоянный множитель a^4 не влияет на то значение x, при котором произведение достигает максимума. Замечая, что сумма первых степеней этих множителей

$$\frac{a^2}{x^2 + a^2} + 1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2} = 1,$$

т. е. величина постоянная, заключаем, что рассматриваемое произведение становится наибольшим, когда

$$\frac{a^2}{x^2 + a^2} : \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + a^2}\right) = 2 : 1.$$

Имеем уравнение

$$a^2 = 2x^2 + 2a^2 - 2a^2.$$

Решив это уравнение, находим:

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0{,}71\,a.$$

Монета освещается всего ярче, когда источник света находится на высоте 0,71 расстояния от проекции источника до монеты.

Знание этого соотношения помогает при устройстве наилучшего освещения рабочего места.



ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ПРОГРЕССИИ

ДРЕВНЕЙШАЯ ПРОГРЕССИЯ

Древнейшая задача на прогрессии — не вопрос о вознаграждении изобретателя шахмат, насчитывающий за собою двухтысячелетнюю давность, а гораздо более старая задача о делении хлеба, которая записана в знаменитом египетском папирусе Ринда. Папирус этот, разысканный Риндом полвека назад, составлен около 2000 лет до нашей эры и является списком с другого, еще более древнего математического сочинения, относящегося, быть может, к третьему тысячелетию до нашей эры. В числе арифметических, алгебраических и геометрических задач этого документа имеется такая (приводим в вольной передаче):

Сто мер хлеба разделить между 5-ю людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвертый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме

того, двое первых должны получить в 7 раз меньше трех остальных. Сколько нужно дать каждому?

Решение

Очевидно, количества хлеба, полученные участниками раздела, составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Пусть первый ее член x, разность y. Тогда

доля первого	x
„ второго	$x+y$
„ третьего . .	$x+2y$
„ четвертого . . .	$x+3y$
„ пятого	$x+4y$

На основании условий задачи составляем следующие два уравнения:

$$\begin{cases} x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100 \\ x+(x+y)=7[(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)]. \end{cases}$$

После упрощений первое уравнение получает вид:

$$x+2y=20,$$

а второе:

$$11x=2y.$$

Решив эту систему, получаем

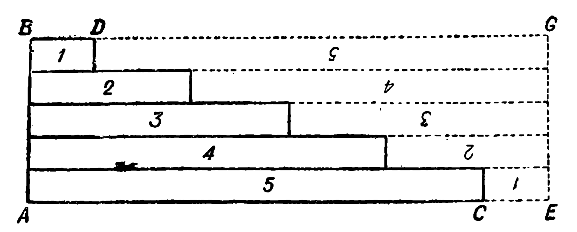
$$x=1\frac{2}{3}; \qquad y=9\frac{1}{6}.$$

Значит, хлеб должен быть разделен на следующие части:

$$1\frac{2}{3}; \ 10\frac{5}{6}; \ 20; \ 29\frac{1}{6}; \ 38\frac{1}{3}.$$

Несмотря на 50-вековую древность этой задачи на прогрессии, в нашем школьном обиходе прогрессии появились сравнительно недавно. В учебнике Магницкого, изданном двести лет назад и служившем целых полвека основным руководством для школьного обучения, прогрессии хотя и имеются, но общих формул, связывающих ее величины между собою, в нем не дано. Сам составитель учебника не без затруднений справлялся поэтому с такими задачами.

Между тем, формулу суммы членов арифметической прогрессии легко вывести простым и наглядным приемом



Вывод формулы суммы арифметической прогрессии.

помощью клетчатой бумаги. На такой бумаге любая арифметическая прогрессия изображается фигурой в форме лестницы. Например, фигура *ABC* на чертеже изображает прогрессию:

2; 5; 8; 11; 14.

Чтобы определить сумму ее членов, дополним чертеж до прямоугольника *ABGE*. Получим две равные фигуры *ABDC* и *DGEC*. Площадь каждой из них изображает сумму членов нашей прогрессии. Значит, двойная

сумма прогрессии равна площади прямоугольника $ABGE$, т. е.

$$(AC + CE) \times AB.$$

Но $AC + CE$ изображает сумму I и V членов прогрессии; AB — число членов прогрессии. Поэтому двойная сумма

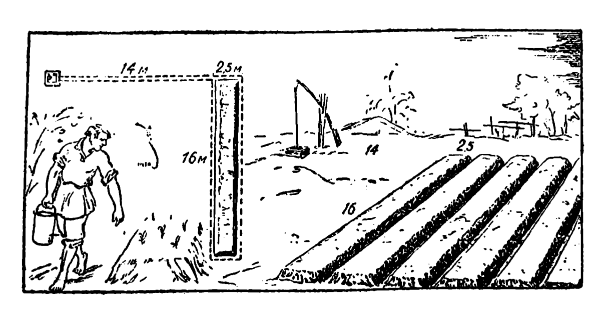
$$2S = (\text{сумма крайних членов}) \times (\text{число членов})$$

или

$$S = \frac{(\text{первый} + \text{посл. член}) \times (\text{число членов})}{2}$$

ПОЛИВКА ОГОРОДА

В огороде 30 грядок, каждая длиною 16 метров и шириною 2,5 метров. Поливая грядки, огородник при-



Задача о поливке огорода.

носит ведра с водою из колодца, расположенного в 14 метрах от края огорода (см. чертеж), и обходит грядки по меже, причем воды, приносимой за один раз, достаточно для поливки только одной грядки. Какой

длины путь должен пройти огородник, поливая весь огород? Путь начинается и кончается у колодца.

Решение

Для поливки первой грядки огородник должен пройти путь

$$14+16+2{,}5+16+2{,}5+14=65 \text{ м.}$$

При поливке второй он проходит

$$14+2{,}5+16+2{,}5+16+2{,}5+2{,}5+14=65+5=70 \text{ м.}$$

Каждая следующая грядка требует пути на 5 м длиннее предыдущей. Имеем прогрессию:

$$65;\ 70;\ 75\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 60+5\cdot 29.$$

Сумма его членов равна

$$\frac{(65+65+29\cdot 5)\,30}{2}=4125 \text{ м.}$$

Огородник при поливке всего огорода проходит путь в 4,125 километра.

КУРИНОЕ СТАДО

Для прокормления стада из 31 куры запасено некоторое количество корма из расчета по декалитру в неделю на каждую куру. При этом предполагалось, что численность стада меняться не будет. Но так как в действительности число кур каждую неделю убывало на 1, то заготовленного корма хватило на двойной срок.

Как велик был запас корма и на сколько времени был он первоначально рассчитан?

Решение

Пусть запасено было x декалитров корма на y недель. Так как корм рассчитан на 31 куру, по 1 декалитру на куру в неделю, то

$$x=31y.$$

В первую неделю израсходовано было 31 дл, во вторую 30, в третью 29 и т. д. до последней недели всего удвоенного срока, когда израсходовано было:

$$(31-2y+1) \text{ декалитров}.$$ [1]

Весь запас составлял, следовательно:

$$x=31y=31+30+29+\ .\ .\ .\ .\ +(31-2y+1).$$

Сумма $2y$ членов прогрессии, первый член которой 31, а последний $31-2y+1$, равна

$$31y=\frac{(31+31-2y+1)\,2y}{2}=(62-2y+1)\,y.$$

Так как y не может быть равен нулю, то мы в праве обе части равенства сократить на этот множитель. Получаем:

$$31=62-2y+1 \quad \text{и} \quad y=16,$$

откуда

$$x=31y=496.$$

Запасено было 496 декалитров корма на 16 недель.

АРТЕЛЬ ЗЕМЛЕКОПОВ

Артель землекопов подрядилась вырыть канаву. Если бы она работала в полном составе, канава была бы вырыта в 24 часа. Но в действительности к работе приступил сначала только один землекоп. Спустя некоторое время присоединился второй; еще через столько же

[1] Поясним: расход корма в течение

1-й недели	31 дл,
2-й „	$31-1$ дл,
3-й „	$31-2$ „
$2y$-й „	$31-(2y-1)=(31-2y+1)$ дл.

времени — третий, за ним через такой же промежуток четвертый и так до последнего. При расчете оказалось, что первый работал в 11 раз дольше последнего.

Сколько времени работал последний?

Решение

Пусть последний землекоп работал x часов, тогда первый работал $11x$ часов. Далее, если число членов артели y, то общее число часов работы определится как сумма y членов убывающей прогрессии, первый член которой $11x$, а последний x, т. е.

$$\frac{(11x + x)y}{2} = 6xy.$$

С другой стороны известно, что артель из y человек, работая в полном составе, выкопала бы канаву в 24 часа, — т. е. что для выполнения работы необходимо $24y$ рабочих часов. Следовательно,

$$6xy = 24y.$$

Число y не может равняться нулю, на этот множитель можно поэтому уравнение сократить:

$$6x = 24 \quad \text{и} \quad x = 4.$$

Итак, землекоп, приступивший к работе последним, работал 4 часа.

Мы ответили на вопрос задачи; но если бы мы полюбопытствовали узнать, сколько рабочих входило в артель, то не могли бы этого определить, — несмотря на то, что в уравнении число это фигурировало (под буквою y). Для решения этого вопроса в задаче не приведено достаточных данных.

СТОИМОСТЬ КОЛОДЦА

Вырыть колодец поперечным сечением в 1 кв. метр и глубиной 10 метров стоило 300 руб.

Такого же сечения колодец глубиною 12 метров обошелся в 364 руб.

Третий колодец того же сечения, но глубиной 15 метров обошелся в 475 рублей.

Вычислите стоимость четвертого колодца того же сечения, но глубиною 18 метров.

Решение

Эта практическая задача требует не только математического, но и хозяйственного углубления в ее условия. Примем в соображение, что общие расходы на рытье колодца слагаются из

1) затрат на основное оборудование работ;
2) затрат на копание земли;
3) затрат по извлечению земли на поверхность.

Первый расход не зависит от глубины колодца. Обозначим его через x.

Второй расход прямо пропорционален глубине колодца. Если стоимость выкопки 1 кубометра y, то для колодца глубиною 10 метров он выразится в сумме $10y$.

Третий расход — на подъем накопанной земли — зависит от количества нарытой земли и от высоты подъема. Если подъем 1 кубометра земли на высоту 1 метра обходится в z рублей, то извлечение первого кубометра (подъем в среднем на высоту $1/2$ м) обойдется в $\frac{z}{2}$ руб., второго кубометра (подъем в среднем на высоту $1\,1/2$ м) — в $\frac{3z}{2}$, третьего — в $\frac{5z}{2}$, n-го — $\frac{(2n-1)z}{2}$. Весь же расход

на извлечение земли из колодца глубиною n метров выразится в сумме

$$\frac{z}{2}+\frac{3z}{2}+\frac{5z}{2}+\ \ldots\ +\left(\frac{2n-1}{2}\right)z.$$

Ряд этот представляет арифметическую прогрессию

Сумма его

$$\frac{[z+(2n-1)z]\,n}{2\cdot 2}=\frac{(z+2nz-z)\,n}{4}=\frac{n^2z}{2}.$$

Первый колодец обошелся в

$$x+10y+\frac{10^2z}{2}=x+10y+50z.$$

Второй — в

$$x+12y+\frac{12^2z}{2}=x+12y+72z.$$

Третий — в

$$x+15y+\frac{15^2z}{2}=x+15y+112{,}5z.$$

Имеем три уравнения с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x+10y+50z=300\\ x+12y+72z=364\\ x+15y+112{,}5z=475.\end{cases}$$

Вычитая первое уравнение из второго, а затем из третьего, получаем систему

$$\begin{cases} 2y+22z=64\\ 5y+62{,}5z=175,\end{cases}$$

решив которую, находим:

$$x=100;\quad y=10;\quad z=2.$$

Теперь нетрудно определить стоимость четвертого колодца, глубина которого 18 метров. Она равна, на основании предыдущего

$$x+18y+\frac{18^2z}{2}=x+18y+162z=$$
$$=100+18\cdot 10+162\cdot 2=604.$$

Четвертый колодец должен обойтись в 604 руб.

Перейдем теперь к прогрессиям геометрическим, предлагающим гораздо больший выбор интересных задач. На прославленной задаче изобретателя шахматной игры, приводящей к суммированию ряда

$$1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \ldots\ldots\ 2^{63}$$

мы останавливаться не будем, так как она достаточно общеизвестна.[1] Минуя ее, обратимся к ряду других упражнений.

НОВОСТЬ

Некто, узнав в 10 час. утра важную новость, рассказал о ней в течение ближайшего часа 4 товарищам. Каждый из них в течение ближайшего часа сообщил о ней четверым другим; каждый из них в течение часа успел поделиться новостью с четырьмя знакомыми. Сколько человек может быть осведомлено таким путем к 7 часам вечера?

Решение

Задача сводится к нахождению суммы 10 членов геометрической прогрессии:

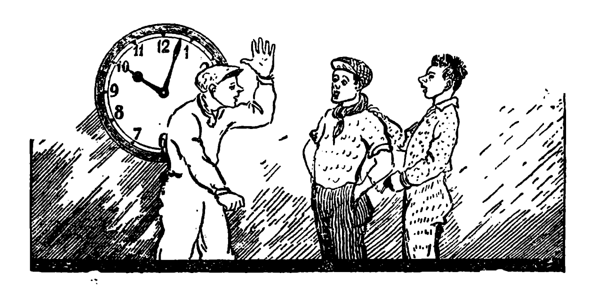
$$1+4+4^2+\ldots+4^9=\frac{4^{10}-1}{4-1}=\frac{2^{20}-1}{3}.$$

[1] О ней см. в моей книжке „Фокусы и развлечения" рассказ „Легенда о шахматной доске".

Последнее выражение можно вычислить приближенно, принимая $2^{10} = 1024 \sim 1000$

$$\frac{2^{20}-1}{3} \sim \frac{10^6-1}{3},$$

т. е. около трети миллиона. Все население большого города может быть таким образом осведомлено о новости в течение одного дня.

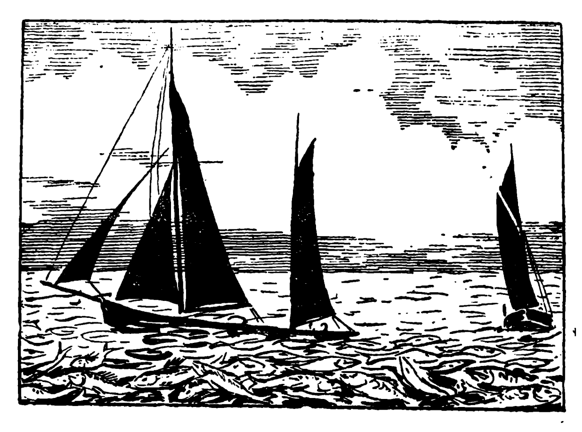


Поразительнее другой расчет в том же роде: если бы новость передавалась так, что каждый, узнавший ее, передавал ее в течение четверти часа двоим другим, то все человечество было бы осведомлено в $7^1/_2$ часов...

ПРОГРЕССИЯ РАЗМНОЖЕНИЯ

Многочисленные примеры геометрических прогрессий постоянно дает нам сама окружающая нас природа, потому что размножение во всем органическом мире совершается именно по такому закону. Этот факт является одним из камней в фундаменте учения Дарвина. Вот что писал об этом великий натуралист (в „Происхождении видов“):

„Борьба за существование неизбежно вытекает из быстрой прогрессии, в какой стремятся к размножению все органические существа. Каждое существо, в течение своей жизни производящее несколько яиц или семян, неминуемо должно подвергаться истреблению в каком-нибудь возрасте, в какой-нибудь период года или, наконец, в какие-нибудь случайные годы — иначе, в силу

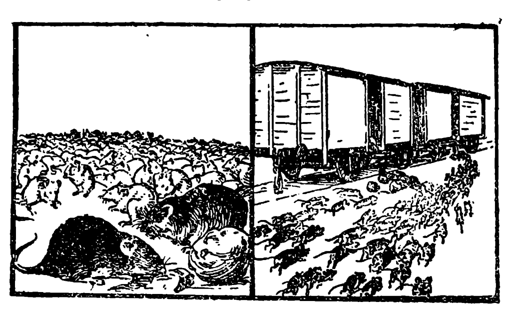


Если бы выживали все появляющиеся на свет рыбы, то потомство одной пары в десять лет сплошь заполнило бы все океаны: мореплавание стало бы невозможным.

геометрической прогрессии размножения, численность его достигла бы таких размеров, что ни одна страна в мире не могла бы прокормить или вместить его потомства. Отсюда — так как производится более особей, чем может выжить, — должна во всех случаях возникать борьба между особями одного вида, либо между особями

различных видов, либо же с физическими условиями жизни. Если, быть может, некоторые виды в настоящее время и разрастаются более или менее быстро, — то все виды такого явления представлять не могут, так как Земля не вместила бы их.

„Не существует ни одного исключения из правила, по которому любое органическое существо естественно размножается в такой прогрессии, что, не подвергайся



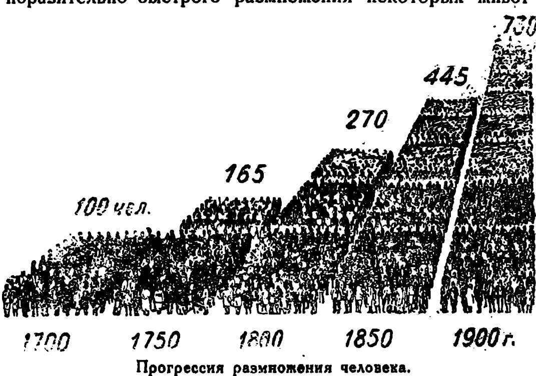
Потомство одной пары крыс в год доходит до 860— | —крысиная армия, поедающая в год 30 тонн хлеба.

Прогрессия размножения вредителей.

оно истреблению, потомство одной пары покрыло бы всю Землю. Даже медленно размножающийся человек в 25 лет удваивается в числе и при такой прогрессии без малого через 1 000 лет для его потомства не достало бы места где стоять. Линней вычислил, что если бы какое-нибудь однолетнее растение производило по два семени (а растений с такой слабой производительностью не существует), то через 20 лет его потомство возросло бы до миллиона. Слон плодится медленнее

всех известных животных, и я вычислил минимальные размеры его размножения. Он начинает плодиться не ранее 30-летнего возраста и до 90 лет приносит не более 6 детенышей, живет же до 100; допустив эти числа, получим, что в период 740—750 лет от одной пары получилось бы 19 миллионов.

„Но мы имеем свидетельства более убедительные, чем эти теоретические соображения, — именно, случаи поразительно быстрого размножения некоторых живот-



Прогрессия размножения человека.

ных в природном состоянии, когда условия почему-либо им благоприятствуют в течение ряда лет. Еще поразительнее факты, касающиеся одичания домашних животных в различных странах; если бы указания на быстрое размножение столь медленно плодящегося рогатого скота и лошадей в Южной Америке и Австралии не опирались на самые достоверные свидетельства, они представлялись бы просто невероятными. То же и с растениями; можно было бы привести примеры растений,

сделавшихся совершенно обыкновенными на протяжении целых островов в период менее 10 лет после того, как они были ввезены. Геометрическая прогрессия их размножения, результаты которой всегда нас поражают, весьма просто объясняет быстрое возрастание их численности и широкое расселение в новом отечестве.

„Мы с уверенностью можем утверждать, что все животные и растения стремятся размножиться в геометрической прогрессии, что они переполнили бы все места, в которых только могли бы ужиться, и что стремление к размножению в геометрической прогрессии должно удерживаться в границах только истреблением в каком-нибудь периоде жизни".

Проверку приведенных в этом отрывке расчетов предоставляю читателю проделать самостоятельно — по образцу тех вычислений, которые выполняются в ряде следующих примеров.

РАЗВЕДЕНИЕ КРОЛИКОВ

Кролик — одно из наиболее быстро размножающихся млекопитающих. Самка в течение года рождает 7 раз, принося каждый раз до 8 детенышей, которые в течение одного года вырастают настолько, что становятся в свою очередь способны к размножению. Вычислите примерную численность потомства одной пары кроликов после 10 лет беспрепятственного размножения.

Решение

Так как расчет требуется только приблизительный, то для облегчения вычислений будем округлять числа. Примем, что самка кролика в течение года приносит около 50 детенышей, среди которых 25 самок. Тогда численность потомства в последовательные годы будет составлять

по истечении:

1 года 50

2 лет $50+25\cdot 50$

3 лет $50+25\cdot 50+25\cdot 25\cdot 50=50\cdot+50\cdot 25+50\cdot 25^2$

. . . .

10 лет $50+50\cdot 25+50\cdot 25^2+\ldots\ldots+50\cdot 25^9$

Последний ряд чисел представляет геометрическую прогрессию с знаменателем 25. Сумма ее 10 членов равна

$$\frac{50\cdot 25^9\cdot 25-50}{50-1}\sim 25^{10}.$$

Приближенное вычисление этой степени можно выполнить без логарифмов следующим образом:

$$25^{10}=\left(\frac{100}{4}\right)^{10}=\left(\frac{10}{2}\right)^{20}=\frac{10^{20}}{2^{20}}=\frac{10^{20}}{2^{10}\cdot 2^{10}}.$$

Но $2^{10}=1\,024\approx 1\,000$, или 10^3; поэтому

$$25^{10}\sim\frac{10^{20}}{10^3\cdot 10^3}=10^{14}=100\cdot 10^{12},$$

или сто биллионов. Вспомним, что число квадратных метров поверхности всей суши лишь немногим больше этого: 125 биллионов!

Известно, какое важное значение должно приобрести быстрое размножение кроликов в советском животноводстве. При разведении кроликов значительная часть их потребляется с хозяйственной целью. Предположим, что потребляется 80% приплода, и рассчитаем, какое при таком условии накопится стадо по истечении 10 лет.

По истечении:

1 года $50-50\cdot 0{,}8=50\cdot 0{,}2=10$

2 лет $10+50\cdot 5\cdot 0{,}2=10+10\cdot 5$

3 лет $10 + 10 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 50 \cdot 0{,}2 = 10 + 10 \cdot 5 + 10 \cdot 5^2$

$\cdot \qquad\qquad\qquad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

10 лет $10 + 10 \cdot 5 + 10 \cdot 5^2 + \quad \ldots \quad + 10 \cdot 5^9$

Сумма членов последнего ряда чисел равна

$$\frac{10 \cdot 5^9 \cdot 5 - 10}{5 - 1} = \frac{10}{4} \cdot 5^{10} = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^{10} \sim 2{,}5 \cdot \frac{10^{10}}{2^{10}}.$$

Но $2^{10} \sim 10^3$; поэтому искомая сумма приблизительно равна

$$2{,}5 \cdot \frac{10^{10}}{10^3} = 2{,}5 \cdot 10^7 = 25 \text{ миллионов.}$$

Кроличье стадо, даже при потреблении 80% приплода, достигло бы через 10 лет численности в десятки миллионов!

САРАНЧА

От разведения полезного в хозяйстве животного перейдем к размножению вредителей возделываемых растений: здесь геометрическая прогрессия размножения является для нас злом, с которым приходится вести упорную борьбу. Типичный вредитель из мира насекомых — саранча, самка которой кладет в год около сотни яичек. Полагая, что в каждом поколении половину составляют самки, вычислите, какую площадь займет десятое поколение саранчи. Считайте для простоты, что взрослое насекомое занимает площадь в 5 кв. см.

Решение

Первое поколение насчитывает 100 насекомых. Второе $50 \cdot 100$; третье — $50 \cdot 50 \cdot 100$, или $100 \cdot 50^2$, и т. д. до десятого, численность которого должна равняться

$$100 \cdot 50^9 = 2 \cdot 50^{10} = 2 \cdot \left(\frac{100}{2}\right)^{10} = 2\left(\frac{10^{20}}{2^{10}}\right) \sim 2 \cdot \frac{10^{20}}{10^3}.$$

Получаем приближенно

$$2 \cdot 10^{17}.$$

Число кв см.,. занимаемых таким числом насекомых, равно

$$5 \times 2 \cdot 10^{17} = 10^{18}.$$

Так как в кв. километре $10^5 \cdot 10^5$, т. е. 10^{10} кв. см, то эта площадь равна

$$10^{18} : 10^{10} = 10^8 \text{ кв. км.}$$

Поверхность земного шара равна $5 \cdot 10^8$ кв. м., т. е. всего в 5 раз больше. Значит, при беспрепятственном размножении саранча в течение 10 лет буквально покрыла бы все материки нашей планеты. К счастью, помимо недостатка пищи, „размножение саранчевых обыкновенно сильно ограничивается их естественными врагами, главным образом паразитами-грибками, некоторыми насекомыми; грибки обусловливают иногда целые эпидемии“ (Холодковский). Тем не менее, перелетная саранча появляется нередко настоящими тучами, заслоняющими солнце, наблюдались случаи, когда численность скопления саранчи оценивалась в сто и более биллионов особей.

СОРНЫЕ ТРАВЫ

Распространенное на наших полях весьма вредное сорное растение (однолетнее)—куколь—производит 1 000 семян. Принимая, что из них прорастает только 10%, а из растений доживает до плодоношения также только 10%, вычислите, сколько растений насчитывает 10-е поколение этого сорняка.

Решение

По истечении года вырастает из одного растения 100. По истечении 2 лет 10 из них принесут 10 000 семян,

из которых вырастет 1 000 растений. По истечении 3 лет 100 из них принесут 100 000 семян, из которых вырастет 10 000 растений. Итак, первое поколение насчитывает 100 экземпляров, второе 1 000, третье — 10 000 и т. д. до 10-го поколения, в котором будет

10^9, т. е. миллиард растений.

Принимая поверхность всей суши равной круглым числом 100 биллионам (10^{14}) кв. м и считая, что на 1 кв. м может расти 1 000 экземпляров куколя, легко рассчитать, через сколько лет потомство одного куколя должно при принятых условиях размножения покрыть всю сушу нашей планеты. Обозначим искомое число через x; имеем уравнение

$$10^{x-1} : 1\,000 = 10^{14}, \text{ или } 10^{x-4} = 10^{14},$$

откуда

$$x - 4 = 14 \text{ и } x = 18.$$

Предлагаю читателю самому проделать подобный же расчет для василька, приносящего 5 000 семян, и для метлы обыкновенной, приносящей 10 000 семян. Для последней считайте, что мерами борьбы удается уничтожать 0,999 семян и 0,9 молодых растений.

РАЗМНОЖЕНИЕ ИНФУЗОРИЙ

Самый поразительный пример прогрессии размножения дают нам инфузории. Инфузория, носящая название парамеции (туфелька), размножается продольным делением своего тела на два новых индивида, которые, спустя некоторое время, в свою очередь претерпевают деление и т. д. Установлен случай, когда такое деление совершалось в среднем каждые 27 часов, причем наблюдалось 8 061 последовательное деление.

Пользуясь этими данными и зная, что 1 000 этих инфузорий занимают в объеме 1 куб. миллиметр, вычислите, какой объем заняло бы потомство одной парамеции, если бы все 8061 поколение остались в живых.

Решение

Чтобы определить численность всего потомства, надо просуммировать прогрессию:

$$2 + 2^2 + \ . \ . \ . \ . \ + 2^{8061}.$$

Сумма ее членов равна

$$\frac{2^{8031} \cdot 2 - 2}{2 - 1} = 2^{8062} - 2 \approx 2^{8062}.$$

Вычисление выполняем помощью логарифмов:

$$8\,062 \lg 2 = 2\,426{,}90\,386$$

$$2^{8062} \approx 8 \cdot 10^{2426}.$$

В одном куб. мм помещается 10^3 этих инфузорий, в 1 куб. метре $10^3 \times 10^9 = 10^{12}$, а в 1 куб. километре $10^{12} \times 10^9 = 10^{21}$. Сколько же кубических километров занимало бы потомство нашей инфузории?

$$8 \cdot 10^{2426} : 10^{21} = 8 \cdot 10^{2405}.$$

Все небесные светила видимой вселенной, вместе взятые, составляют лишь ничтожную долю этого объема! Считая, что нашим сильнейшим телескопам доступен миллиард миллиардов солнц, будем иметь для их объема число порядка „только“ 10^{36} куб. километров.

ПОКУПКА ЛОШАДИ

В старинной „арифметике“ Магницкого мы находим следующую забавную задачу, которую привожу здесь, не сохраняя языка подлинника:

„Некто продал лошадь за 156 руб. Но покупатель, приобретая лошадь, раздумал ее покупать и возвратил продавцу, говоря:

„—Нет мне расчета покупать за такую цену лошадь, которая таких денег не стоит".

„Тогда продавец предложил другие условия:

„—Если по-твоему цена лошади высока, то купи только ее подковные гвозди, лошадь же получишь тогда в придачу бесплатно. Гвоздей в каждой подкове 6. За первый гвоздь дай мне всего $^1/_4$ коп., за второй—$^1/_2$ коп., за третий — 1 коп. и т. д.

„Покупатель, соблазненный низкой ценой и желая даром получить лошадь, принял условия продавца, рассчитывая, что за гвозди придется уплатить не более 10 рублей.

„На сколько покупатель проторговался?"

Решение

За 24 подковных гвоздя пришлось уплатить

$$^1/_4 + ^1/_2 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^{24-3}.$$

Сумма эта равна

$$\frac{2^{21}.2 - \frac{1}{4}}{2-1} = 2^{22} - 1 = 4\,194\,303\frac{3}{4} \text{ коп.}$$

т. е. около 42 тысяч рублей. При таких условиях не обидно дать и лошадь в придачу.

Любопытно, что известный знаток истории математики, проф. В. В. Бобынин считал эту задачу ниоткуда Магницким не заимствованной, а придуманной им самостоятельно. Однако, она встречается в книге современного английского физика Лоджа „Легкая математика". Так как Лодж едва ли читал Магницкого, то ясно, что интере-

сующая нас задача принадлежит к числу тех, которые столетия назад придуманы безвестными математиками из народа.

ВОЗНАГРАЖДЕНИЕ ВОИНА

Из другого старинного русского учебника математики, носящего пространное заглавие:

„Полный курс чистой математики, сочиненный Артиллерии Штык-Юнкером и Математики партикулярным Учителем Ефимом Войтяховским в пользу и употребление юношества и упражняющихся в Математике“ (1795),

заимствую следующую задачу:

„Служившему воину дано вознаграждение за первую рану 1 коп., за другую 2 коп., за третью 4 коп. и т. д. По исчислению нашлось, что воин получил всего вознаграждения 655 р. 35 к. Спрашивается число его ран“.

Решение

Составляем уравнение:

$$65535 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^{x-1}$$

или

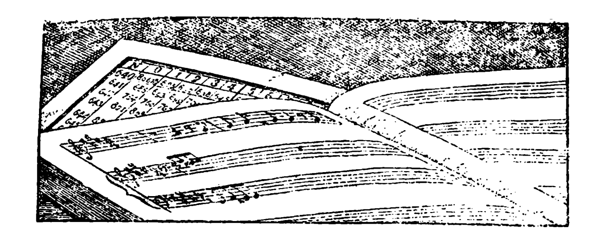
$$65535 = \frac{2^{x-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^x - 1;$$

Откуда имеем

$$65536 = 2^x, \text{ и } x = 16,$$

результат, который легко находим путем разложения на множителей.

При столь великодушной системе вознаграждения боец должен получить 16 ран и остаться притом в живых, чтобы удостоиться награды в 655 р. 35 к.



ГЛАВА ВОСЬМАЯ

СЕДЬМОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ

СЕДЬМОЕ ДЕЙСТВИЕ

Мы упоминали уже, что пятое действие — возвышение в степень — имеет два обратных. Если

$$a^b = c,$$

то разыскание a есть одно обратное действие — извлечение корня, нахождение же b — другое, логарифмирование. Полагаю, что читатель этой книги знаком с основами учения о логарифмах в объеме школьного курса. Для него, вероятно, не составит труда сообразить, чему, например, равно такое выражение:

$$a^{\lg_a b}$$

Нетрудно понять, что если основание логарифмов (a) возвысить в степень логарифма числа b, то должно получиться это число b.

Для чего были придуманы логарифмы? Конечно, для ускорения и упрощения вычислений. Изобретатель пер-

вых логарифмических таблиц, гениальный математик-любитель Непер, так говорит о своих побуждениях:

— „Я старался, насколько мог и умел, отделаться от трудности и скуки вычислений, докучность которых обычно отпугивает весьма многих от изучения математики".

В самом деле: логарифмы чрезвычайно облегчают и ускоряют вычисления, — не говоря уже том, что они дают возможность производить такие операции, которые без их помощи совершенно невыполнимы (извлечение корня любой степени). Не без основания писал Лаплас, что „изобретение логарифмов, сокращая вычисления нескольких месяцев в труд нескольких дней, словно удваивают жизнь астрономов". Великий математик говорит об астрономах, так как им приходится делать особенно сложные и утомительные вычисления. Но слова его могут быть с полным правом отнесены и ко всем вообще, кому приходится иметь дело с числовыми выкладками.

Нам, привыкшим к употреблению логарифмов и к доставляемым ими облегчениями выкладок, трудно представить себе то изумление и восхищение, которое вызвали они при своем появлении. Современник Непера, талантливый математик Бригг, прославившийся позднее изобретением десятичных логарифмов, писал, получив сочинение Непера: „Своими новыми и удивительными логарифмами Непер заставил меня усиленно работать и головой и руками. Я надеюсь увидеть его летом, так как никогда не читал книги, которая нравилась бы мне больше и приводила бы в большее изумление". Бригг осуществил свое намерение и направился в Ирландию, чтобы посетить изобретателя логарифмов. При встрече оба математика первые четверть часа безмолвно рассматривали друг друга, наконец Бригг сказал:

„— Я предпринял это долгое путешествие с единственной целью видеть вас и узнать, помощью какого орудия остроумия и искусства были вы приведены к первой мысли о превосходном пособии для астрономии — логарифмах. Впрочем, теперь я больше удивляюсь тому, что никто не нашел их раньше, — настолько кажутся они простыми после того, как о них узнаешь“.

СОПЕРНИКИ ЛОГАРИФМОВ

Ранее изобретения логарифмов потребность в упрощении выкладок породила таблицы иного рода, помощью которых действие умножения заменяется не сложением, а вычитанием. Устройство этих таблиц основано на тождестве:

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

в справедливости которого легко убедиться, раскрыв скобки.

Имея готовые четверти квадратов, можно находить произведение двух чисел, не производя умножения, а вычитая из четверти квадрата суммы этих чисел четверть квадрата их разности. Те же таблицы облегчают возвышение в квадрат и извлечение квадратного корня, а в соединении с таблицей обратных чисел — упрощают и действие деления. Их преимущество перед таблицами логарифмическими состоит в том, что помощью них получаются **точные** результаты, а не приближенные. Зато они уступают логарифмическим в целом ряде других пунктов, практически гораздо более важных. В то время как таблицы четвертей квадратов позволяют перемножать только **два** числа, логарифмы дают возможность находить **сразу** произведение любого числа множителей,

а кроме того — возвышать в любую степень и извлекать корни с любым показателем (целым или дробным). Вычислять, например, сложные проценты помощью таблиц четвертей квадратов поэтому нельзя.

Тем не менее таблицы четвертей квадратов издавались и после того, как появились логарифмические таблицы всевозможных родов. В 1865 г. во Франции вышли таблицы под заглавием:

„*Таблица квадратов чисел от 1 до 100 миллионов, помощью которой находят точное произведение чисел весьма простым приемом, более удобным, чем помощью логарифмов. Составил Александр Коссар*“.

Идея эта возникает у многих, не подозревающих о том, что она уже давно осуществлена. Ко мне раза два обращались изобретатели подобных таблиц, как с новинкой, и очень удивлялись, узнав, что их изобретение имеет более-чем трехсотлетнюю давность.

Другим, более молодым соперником логарифмов являются вычислительные таблицы, имеющиеся во многих технических справочниках. Это сводные таблицы, содержащие следующие графы: квадраты чисел, кубы, квадратные корни, кубические корни, обратные числа, длины окружности и площади кругов для чисел от 2 до 1000.[1] Для многих технических расчетов эти таблицы очень удобны; однако, они не всегда достаточны; логарифмические имеют гораздо более обширную область применения.

ЭВОЛЮЦИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

В современных школах у нас чаще всего употребляются 5-значные, в Германии же — 4-значные логарифмиче-

---

[1] ОГИЗом выпущены такие таблицы с подробным наставлением к их применению, написанным мною („Таблицы и правила для вычислений“ Я. И. Перельмана, 1931).

ские таблицы. Следовало бы и нам остановиться окончательно на 4-значных, так как они вполне достаточны для всех технических расчетов. А для большинства практических надобностей можно успешно обходиться даже трехзначными мантиссами: ведь обиходные измерения редко выполняются более чем с тремя знаками. Мысль о достаточности более коротких мантисс осознана сравнительно недавно. Я еще помню время, когда в наших школах были в употреблении увесистые томы 7-значных логарифмов, уступившие свое место 5-значным лишь после упорной борьбы. Французский астроном Лаланд, составитель первых 5-значных таблиц, много способствовал их проникновению в школьный обиход заявлением, что все свои астрономические вычисления он выполняет именно по таким таблицам.

Но и 7-значные логарифмы при своем появлении (1794 г.) казались непозволительным новшеством. Первые десятичные логарифмы, созданные трудом лондонского математика Генриха Бригга (1624 г.), были 14-значные. Их сменили спустя несколько лет 10-значные таблицы голландского математика Адриана Влакка. Как видим, эволюция ходовых логарифмических таблиц шла от многозначных мантисс к более коротким и не завершилась еще в наши дни, так как и теперь многими не осознана та простая мысль, что точность вычислений не может превосходить точности измерений.

Укорочение мантисс влечет за собой два важных практических следствия: 1) заметное уменьшение объема таблиц и связанное с этим 2) упрощение пользования ими, а значит — и ускорение выполняемых помощью них вычислений. Семизначные логарифмы чисел занимают около 200 страниц большого формата; 5-значные — 30 страничек вдвое меньшего формата; 4-значные занимают вдесятеро меньший объем, умещаясь на двух страницах

большого формата;[1] трехзначные же могут поместиться на одной странице, как видно из приложенного в конце нашей книги образчика.

Что же касается быстроты вычислений, то один немецкий астроном (Энке) установил следующее соотношение: расчет, выполняемый по 5-значным таблицам, берет втрое меньше времени, чем по 7-значным.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ДИКОВИНКИ

Если вычислительные потребности практической жизни и технического обихода вполне обеспечиваются 3- и 4-значными таблицами, то, с другой стороны, к услугам теоретического исследователя имеются таблицы и с гораздо большим числом знаков, чем даже 14-значные логарифмы Бригга. Вообще говоря, логарифм, как всякое иррациональное число, не может быть выражен совершенно точно никаким числом цифр; логарифмы большинства чисел, сколько бы знаков ни брать, выражают их истинную величину лишь приближенно, — тем точнее, чем больше цифр в их мантиссе. Для научных работ оказывается иногда недостаточной точность 14-значных логарифмов;[2] но среди 500 всевозможных образцов логарифмических таблиц, вышедших в свет со времени их изобретения, исследователь всегда найдет такие, которые его удовлетворят. Назовем, например, 20-значные логарифмы чисел от 2 до 1200, изданные во Франции Коллетом. Для еще более ограниченной группы чисел имеются таблицы логарифмов с огромным числом десятичных знаков — настоящие логарифмические диковинки,

[1] Исключение составляют 4-значные таблицы Н. П. Каменьщикова, которые, вследствие нерационального устройства, по объему не уступают 5-значным.

[2] 14-значные логарифмы Бригга имеются, впрочем, только для чисел от 1 до 20000 и от 90000 до 100000.

о существовании которых, как я убедился, не подозревают и многие присяжные математики.

Вот эти логарифмы-исполины; все они не десятичные, а натуральные:[1]

48-значные таблицы Вольфрама для чисел до 10000;
61-значные таблицы Шарпа;
102-значные таблицы Паркхерста

и, наконец, логарифмическая сверхдиковинка:

260-значные логарифмы Адамса.

В последнем случае мы имеем, впрочем, не таблицу, а просто так называемые „натуральные" логарифмы 5 чисел: 2, 3, 5, 7 и 10 и переводный (260-значный) множитель для перечисления их в десятичные. Нетрудно, однако, понять, что, имея логарифмы этих пяти чисел, можно простым сложением или умножением получить логарифмы множества составных чисел; например, логарифм 12 равен сумме логарифмов 2, 2 и 3, и т. п.

К числу логарифмических диковинок можно было бы с полным основанием отнести и счетную линейку — „деревянные логарифмы" — если бы этот остроумный прибор не сделался, благодаря своему удобству, столь же обычным счетным орудием для техников, как десятикосточковые счеты среди конторских работников. Привычка угашает чувство изумления перед прибором, работающим по принципу логарифмов и тем не менее не требующим от пользующихся им даже знания того, что такое логарифм.

Подлинной логарифмической диковинкой является дорогой и редкий **прибор для вычисления логарифмов**. Утомительные и долгие выкладки заменяются

---

[1] Натуральными называются логарифмы, вычисленные не при основании 10, а при основании числа 2, 718..., о котором у нас еще будет речь впереди.

работой остроумно придуманного механизма, который не только вычисляет один логарифм за другим, но и заготовляет типографский стереотип для их печатания. Свыше $2^1/_2$ страниц набора таблиц машина изготовляет за то время, пока самый искусный наборщик успеет набрать только одну страницу с готового оригинала.

ПРОСТЕЙШАЯ ТАБЛИЦА ЛОГАРИФМОВ

Самая простая логарифмическая таблица, вполне пригодная для практических целей, дана в конце настоящей книги. Это—трехзначные логарифмы в том виде, в каком они предложены английским физиком Лоджем и усовершенствоганы мною (прибавлением готовых поправок). Способ обращения с таблицей не требует долгих пояснений; он ясен из сопровождающего ее текста. Такую табличку полезно иметь всегда при себе.

Впрочем, если в дороге или на экскурсии она при вас не окажется, вы сможете без большого труда и обширных познаний в математике сами ее вычислить. Вообще говоря, вычисление логарифмов — дело весьма не легкое, особенно когда желают получить мантиссу с большим числом знаков. Труд, затраченный на это составителями первых таблиц,—совершенно беспримерен в истории математики. Чтобы вычислить, например, логарифм 2, Бригг выполнил 47 последовательных извлечений квадратного корня из числа 1024,—каждое с 18 десятичными знаками. Этот египетский труд был облегчен позднее, с тех пор, как в конце XVII века известный математик и картограф Меркатор нашел более легкий и быстрый способ (логарифмический ряд).

Сказанное относится, однако, к логарифмам с многозначной мантиссой; трехзначные же логарифмы вычисляются весьма просто, если воспользоваться приемом,

которым—в числе прочих—Бригг облегчал свою чудовищную вычислительную работу.

Вычислим, например, логарифм 2. Мы знаем, что $2^{10} = 1024$. Значит, $10 \lg 2 = \lg 1024$ и

$$\lg 2 = \frac{\lg 1024}{10}.$$

Приближенно — с точностью до двух цифр — мы можем принять, что $\lg 1024$ равен $\lg 1000$. Тогда (употребляя знак приближенного равенства $\sim$)

$$\lg 2 \sim 0{,}30.$$

Ошибка, допущенная нами, равна $\frac{0{,}024}{10}$, т. е. 0,0024 от 2. Так как небольшую прибавку логарифма можно считать пропорциональною соответствующей прибавке числа, то наш приближенный результат 0,30 надо исправить прибавлением к нему 0,0024 его величины.

$$0{,}30 \times 0{,}0024 = 0{,}000720 \sim 0{,}001$$

$$\lg 2 = 0{,}30 + 0{,}001 = 0{,}301.$$

Сходным образом вычисляем $\lg 3$. При этом исходим из равенства $3^4 = 81$. Значит, $4 \lg 3 = \lg 81$

$$\lg 3 = \frac{\lg 81}{4} \sim \frac{\lg 80}{4}$$

Но $\quad 80 = 10 \times 2^3; \quad \lg 80 = 1 + 3 \lg 2 = 1{,}903$

$$\lg 3 \sim \frac{1{,}903}{4} \sim 0{,}476.$$

Исправляем этот приближенный результат на $\frac{1}{4} \times \frac{1}{80}$ т. е. на $\frac{1}{320}$, или 0,003 его величины (округленной до 0,48)

$$0{,}48 \times 0{,}003 \sim 0{,}001$$

$$0{,}476 + 0{,}001 = 0{,}477.$$

Логарифмы 4, 5, 6 находим еще проще, потому что

$$\lg 4 = 2 \lg 2 = 0{,}602$$

$$\lg 5 = \lg 10 - \lg 2 = 1 - 0{,}301 = 0{,}699$$

$$\lg 6 = \lg 2 + \lg 3 = 0{,}778.$$

Чтобы найти $\lg 7$, подыскиваем такую степень 7, которая мало отличается от числа, получаемого перемножением чисел 2, 3 и 5. Бригг воспользовался равенством $7^4 = 2401$, и мы последуем его примеру

$$\lg 7 = \frac{\lg 2401}{4} \sim \frac{\lg 2400}{4}$$

Но $2400 = 100 \times 2^3 \times 3$; значит, $\lg 2400 = 2 + 3 \lg 2 + \lg 3 = 2 + 0{,}903 + 0{,}477 = 3{,}380$.

$$\lg 7 = \frac{3{,}380}{4} = 0{,}845.$$

Исправлять этот логарифм нет надобности, так как соответствующая поправка, составляющая $^1/_{9600}$ его величины, не влияет на 3-ю цифру мантиссы.

Читатель, уловивший из этих примеров сущность приема, сам может вычислить другие логарифмы. Трудность представляют только числа простые; логарифмы чисел составных определяются как суммы логарифмов их простых множителей. Что же касается простых чисел, то всегда можно найти подходящую степень или кратное, которое нас выручит. Приведем несколько примеров.

Для вычисления $\lg 11$ мы, следуя Бриггу, можем воспользоваться равенством

$$99^2 = 9801$$

$$3^2 . 11^2 \sim 9800$$

$$11^2 \sim \frac{7^2 . 100}{3^2}$$

и, следовательно,

$$\lg 11 \sim \frac{2\lg 7 + 2 - 3\lg 3}{2}.$$

Так как $\lg 7$ и $\lg 3$ уже известны, то вычисление этим путем вполне возможно; поправка излишня.

Чтобы вычислить $\lg 13$, исходим из равенства

$$13^3 = 2197 \sim 2200.$$

Для $\lg 17$ прибегаем к равенству

$$17^3 = 4913 \sim 4900.$$

Для $\lg 19$—к равенству

$$19^2 = 361 \sim 360.$$

Для $\lg 23$—к равенствам:

$$23^2 = 529 \sim 530$$

$$53^2 = 2809 \sim 2800.$$

Для $\lg 29$—к равенству

$$29^2 = 841 \sim 840.$$

Для $\lg 31$—к равенству

$$31^2 = 961 \sim 960.$$

И так далее до $\lg 97$, который вычисляется помощью равенства

$$97^2 = 9409 \sim 9400.$$

Логарифмы же трехзначных чисел — 111 и т. д. — можно вычислять пропорциональным изменением логарифмов двузначных чисел—110 и т. д. Только для 101, 102 и др. понадобится прибегнуть к степеням:

$$101^2 = 10201 \sim 10200 \sim 2 \,.\, 3 \,.\, 17 \,.\, 100$$

и т. д.

ЛОГАРИФМЫ НА ЭСТРАДЕ

Самый поразительный из номеров, выполняемых перед публикой профессиональными счетчиками, без сомнения — следующий. Предуведомленные афишей, что счетчик-виртуоз будет извлекать в уме корни высоких степеней из многозначных чисел, вы заготовляете дома, путем многочасовых выкладок, 31-ю степень какого-нибудь числа и намерены сразить счетчика 35-значным числовым дредноутом. В надлежащий момент вы обращаетесь к счетчику со словами:

— А попробуйте извлечь корень 31-й степени из следующего 35-значного числа! Запишите, я продиктую.

Виртуоз-вычислитель берет мел, но прежде чем вы успели открыть рот, чтобы произнести первую цифру, у него уже написан результат: 13.

Не зная числа, счетчик извлек из него корень, да еще 31-й степени, да еще в уме, да еще с молниеносной быстротой!..

Вы изумлены, уничтожены, — а между тем во всем этом нет ничего сверхъестественного. Секрет просто в том, что существует только одно число, именно 13, которое в 31-й степени дает 35-значный результат. Числа меньшие 13 дают меньше 35 цифр, большие — больше.

Откуда, однако, счетчик знал это? Как разыскал он число 13? Здесь ему помогли логарифмы, двузначные логарифмы, которые он помнит наизусть для первых 15 — 20 чисел. Затвердить их вовсе не так трудно, как кажется, особенно, если пользоваться тем, что логарифмы чисел составных равны сумме логарифмов их простых множителей. Зная твердо логарифмы 2, 3 и 7, вы уже знаете логарифмы чисел первого десятка; для второго десятка требуется запомнить логарифмы еще четырех чисел.

Как бы то ни было, эстрадный вычислитель мысленно располагает следующей табличкой двузначных логарифмов.

Числа	Лог.	Числа	Лог.
2	0,3	11	1,04
3	0,48	12	1,08
4	0,6	13	1,11
5	0,7	14	1,15
6	0,78	15	1,18
7	0,84	16	1,20
8	0,9	17	1,23
9	0,95	18	1,25
		19	1,28

Изумивший вас математический трюк состоял в следующем:

$$\lg \sqrt[31]{(35 \text{ цифр})} = \frac{34, \ldots}{31}.$$

Искомый логарифм может заключаться между пределами

$$\frac{34}{31} \text{ и } \frac{34,99}{31}, \text{ или } 1,09 \text{ и } 1,13.$$

В этом интервале имеется только логарифм одного целого числа, именно 1,11 — логарифм 13-ти. Таким путем и найден ошеломивший вас результат. Конечно,

чтобы быстро проделать все это в уме, надо обладать находчивостью и сноровкой профессионала, — но, как видите, по существу дело достаточно просто. Вы и сами можете теперь проделывать подобные фокусы, если не в уме, то на бумаге.

Предположим, вам предложена задача: извлечь корень 64-й степени из 20-значного числа...

Не осведомившись о том, что это за число, вы можете объявить результат извлечения: корень равен 2.

В самом деле $\lg \sqrt[64]{(20\ \text{цифр})} = \frac{19}{64}$; он должен, следовательно, заключаться между $\frac{19}{64}$ и $\frac{19{,}99}{64}$, т. е. между 0,29 и 0,31. Такой логарифм для целого числа только один: 0,3, логарифм 2.

Вы даже можете окончательно поразить загадчика, сообщив ему, какое число он собирался вам продиктовать: знаменитое „шахматное“ число

$$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.$$

ЛОГАРИФМЫ НА СКОТНОМ ДВОРЕ

Количество так называемого „поддерживающего“ корма (т. е. то наименьшее количество его, которое лишь пополняет траты организма на теплоотдачу, работу внутренних органов, восстановление отмирающих клеток и т. п.)[1] пропорционально наружной поверхности тела животного. Зная это, определите калорийность поддерживающего корма для вола, весящего 420 кило, если при тех же условиях вол 630 кило весом нуждается в 13500 калориях.

[1] В отличие от „продуктивного“ корма, т. е. части корма, идущей на выработку продукции животного, ради которой оно содержится.

Решение

Чтобы решить эту практическую задачу из области животноводства, понадобится, кроме алгебры, привлечь на помощь и геометрию. Согласно условию задачи, искомая калорийность x пропорциональна поверхности (s) вола, т. е.

$$\frac{x}{13500} = \frac{s}{s_1},$$

где s_1 — поверхность тела вола, весящего 930 кило. Из геометрии мы знаем, что поверхности (s) подобных тел относятся как квадраты их линейных притяжений (l), а объемы (и, следовательно, веса) — как кубы линейных протяжений. Поэтому

$$\frac{s}{s_1} = \frac{l^2}{l_1^2}; \qquad \frac{420}{630} = \frac{l^3}{l_1^3}, \text{ и значит, } \frac{l}{l_1} = \frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}}$$

Откуда

$$\frac{x}{13500} = \frac{\sqrt[3]{420^2}}{\sqrt[3]{630^2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{420}{630}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$x = 13500\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

Помощью логарифмических таблиц находим

$$x = 10300.$$

Вол нуждается в 10300 калориях.

ЛОГАРИФМЫ В МУЗЫКЕ

Музыканты редко увлекаются математикой; большинство их, хотя и питают к ней почтительные чувства, предпочитают все же держаться от нее подальше. Между

тем музыканты — даже те, которые не проверяют, подобно Сальери у Пушкина, „алгеброй гармонию", соприкасаются с математикой гораздо чаще, чем сами подозревают, и при том с такими страшными вещами, как логарифмы. Позволю себе по этому поводу привести отрывок из статьи нашего известного физика проф. А. Эйхенвальда:

„Товарищ мой по гимназии любил играть на рояле, но не любил математики. Он даже говорил с оттенком пренебрежения, что музыка и математика друг с другом ничего не имеют общего. „Правда, Пифагор нашел какие-то соотношения между звуковыми колебаниями, — но ведь как раз Пифагорова-то гамма для нашей музыки и оказалась неприменимой".



„Представьте же себе, как неприятно был поражен мой товарищ, когда я доказал ему, что, играя по клавишам современного рояля, он играет, собственно говоря, на логарифмах... И действительно, так называемые „ступени" темперированной хроматической гаммы не расставлены на равных расстояниях ни по отношению к числам колебаний, ни по отношению к длинам волн соответствующих звуков, а представляют собою л о г а р и ф м ы этих величин. Только основание этих логарифмов равно 2-м, а не 10, как принято в других случаях.

„Положим, что нота *do* самой низкой октавы—будем ее называть **нулевой** октавой — определена n колебаниями в секунду. Тогда *do* первой октавы будет делать в секунду $2n$ колебаний, а m-ой октавы $n.2^m$ колебаний и т. д. Обозначим все ноты хроматической гаммы рояля тоже номерами p, принимая основной тон *do* каждой октавы за нулевой; тогда, например, тон *sol* будет 7-й, *la* будет 9-й и т. д.; 12-й тон будет опять *do*, только октавой выше. Так как в темперированной хроматической гамме каждый последующий тон имеет в $\sqrt[12]{2}$ большее число колебаний, чем предыдущий, то число колебаний любого тона можно выразить формулой

$$N_{pm} = n \cdot 2^n \left(\sqrt[12]{2}\right)^p .$$

Логарифмируя эту формулу, получаем:

$$\lg N_{pm} = \lg n + m \lg 2 + p \frac{\lg 2}{12}$$

или

$$\lg N_{pm} = \lg n + \left(m + \frac{p}{12}\right) \lg 2,$$

а принимая число колебаний самого низкого *do* за единицу ($n = 1$) и переводя все логарифмы к основанию, равному 2-м, т. е. разделяя на $\lg 2$ (или попросту принимая $\lg 2 = 1$), имеем

$$\lg_2 N_{pm} = m + \frac{p}{12} .$$

„Отсюда видим, что номера клавишей рояля представляют собою логарифмы чисел колебаний соответствующих звуков. Мы даже можем сказать, что номер октавы представляет собою **характеристику**, а номер звука в данной октаве — **мантиссу** этого логарифма".

Например, — поясним от себя, — в тоне *sol* третьей октавы, т. е. в числе $3+\frac{7}{12}$ ($=3{,}083$), число 3 есть характеристика логарифма числа колебаний этого тона, а $\frac{7}{12}$ ($=0{,}083$) — мантисса того же логарифма при основании 2; число колебаний, следовательно, в $2^{3{,}083}$, т. е. в 8,47 раз больше числа колебаний тона *do* первой октавы.

ЛОГАРИФМЫ В ЭЛЕКТРООСВЕЩЕНИИ

Причина того, что газополные (часто называемые — неправильно — „полуватными") лампочки дают более яркий свет, чем пустотные с металлическою нитью из такого же материала, кроется в различной температуре нити накала. По правилу, установленному в физике (Лумером), общее количество света, испускаемое при белом калении, растет пропорционально 12-й степени абсолютной температуры. Зная это, проделаем такое вычисление: определим, во сколько раз газополная лампа, температура нити накала которой 2500° (абсолютной шкалы, т. е. при счете от—273° Ц), испускает больше света, чем пустотная с нитью, накаленной до 2200°.

Решение

Обозначим искомое отношение через x, имеем уравнение

$$x=\left(\frac{2500}{2200}\right)^{12}=\left(\frac{25}{22}\right)^{12},$$

откуда

$$\lg x=12\,(\lg 25-\lg 22);$$

$$x=4{,}6.$$

Газополная лампа испускает света в 4,6 раз больше, нежели пустотная. Значит, если пустотная дает свет в 50 свечей, то газополная при тех же условиях даст 230 свечей.

Сделаем еще расчет: какое повышение абсолютной температуры (в процентах) необходимо для удвоения яркости лампочки?

Решение

Составляем уравнение

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^{12}=2,$$

откуда

$$\lg\left(1+\frac{x}{100}\right)=\frac{\lg 2}{12}, \text{ и } x=6\%.$$

Наконец, третье вычисление: насколько—в процентах—возрастет яркость лампочки, если температура ее нити (абсолютная) поднимется на 1%?

Решение

Выполняя помощью логарифмов вычисление

$$x=1{,}01^{12},$$

находим

$$x=1{,}12.$$

Яркость возрастет на 12%.

Проделав вычисление для повышения температуры на 2%, найдем увеличение яркости на 28%; на 3% — увеличение яркости на 43%.

Отсюда ясно, почему техника изготовления электролампочек так гонится за повышением температуры нити накала, дорожа каждым лишним градусом.

ЗАВЕЩАНИЯ НА СОТНИ ЛЕТ

Кто не слыхал о том легендарном числе пшеничных зерен, какое будто бы потребовал себе в награду изобретатель шахматной игры? Число это составилось путем последовательного удвоения единицы: за первое поле шахматной доски изобретатель потребовал 1 зерно, за второе 2 и т. д., все удваивая, до последнего 64-го поля.

Однако, число растет с неожиданной стремительностью не только при последовательном удвоении, но и при гораздо более умеренной норме увеличения. Капитал, приносящий 5%, увеличивается ежегодно в 1,05 раз. Как будто едва заметное возрастание. А между тем, по прошествии достаточного промежутка времени капитал успевает вырасти в огромную сумму. Этим объясняется поражающее увеличение капиталов, завещанных на весьма долгий срок. Кажется странным, что, оставляя довольно скромную сумму, завещатель дает распоряжения об уплате огромных капиталов. Мне известны два исторических документа подобного рода: завещание знаменитого государственного деятеля, изобретателя громоотвода Веньямина Франклина и еще другое завещание — прославившегося только своей жестокостью военного министра эпохи Александра I — Аракчеева.

Первое завещание опубликовано в „Собрании разных сочинений Веньямина Франклина". Вот извлечение из него:

„Препоручаю тысячу фунтов стерлингов бостонским жителям. Если они примут эту тысячу фунтов, то должны поручить ее отборнейшим гражданам, а они будут давать их, с процентами по 5 на сто в год, в заем молодым ремесленникам.[1] Сумма эта через сто лет возвысится до 131 000 фунтов стерлингов. Я желаю, чтобы тогда

[1] В Америке в ту эпоху еще не было кредитных учреждений.

100 000 фунтов употреблены были на постройку общественных зданий, остальные же 31 000 фунтов отданы были в проценты на 100 лет. По истечении второго столетия сумма возрастет до 4 061 000 фунтов стерлингов, из коих 1 060 000 фунтов оставляю в распоряжении бостонских жителей, а 3 000 000 — правлению Массачузетской коммуны. Далее не осмеливаюсь простирать своих видов".

Оставляя всего 1 000 фунтов, Франклин распределяет миллионы. Однако, здесь нет никакого недоразумения. Математический расчет удостоверяет, что соображения завещателя вполне реальны. 1000 фунтов, увеличиваясь ежегодно в 1,05 раз, через 100 лет должны превратиться в

$$x = 1000 \cdot 1{,}05^{100} \text{ фунтов}.$$

Подобные выражения можно вычислять только помощью логарифмов.

$$\lg x = \lg 1000 + 100 \lg 1{,}05 = 5{,}11893,$$

откуда

$$x = 131\,000,$$

в строгом соответствии с текстом завещания. Далее, 31 000 фунтов в течение следующего столетия превратятся в

$$y = 31\,000 \cdot 1{,}05^{100},$$

откуда, вычисляя помощью логарифмов, находим

$$y = 4\,076\,500$$

— сумму, несущественно отличающуюся от указанной в завещании.

Франклин умер в 1790 году; первая часть его завещания, надо думать, была осуществлена; срок же исполнения прочих распоряжений истечет только в 1990 г.

Обратимся теперь к другому долгосрочному завещанию — Аракчеева. Приводим его текст (он был опубликован Академией Наук незадолго до мировой войны) Как и следует ожидать, оно по характеру своему столь же отлично от завещания Франклина, насколько его автор, прислужник царя, отличается от убежденного республиканца Франклина.

ИЗ ЗАВЕЩАНИЯ АРАКЧЕЕВА

„1. Я, нижеподписавшийся, вношу в нынешнем 1833 г. пятьдесят тысяч рублей ассигнациями в Государственный заемный банк, с тем, чтобы сия сумма осталась в оном 93 года неприкосновенно со всеми прирощаемыми на оную в продолжение сего времени процентами, без малейшего ущерба и изъятия.

„2. Сумма сия назначается в награду тому из российских писателей, который через сто лет от кончины в бозе почивающего венценосца, т. е. к 1925 г., напишет на российском языке Историю царствования императора всероссийского Александра I лучше всех.

„7. Академия наук определяет награду за удовлетворительнейшую Историю — три доли капитала с приращенными — через 93 года процентами.

„8. Остальная четвертая часть поступает в распоряжение Российской Академии наук.

„13. Награда сочинителю состоять будет из миллиона четырехсот тридцати тысяч двухсот двадцати рублей; а четвертая часть, четыреста семьдесят девять тысяч семьсот сорок рублей, поступит в распоряжение Академии“.

Оставляя всего 50 тысяч рублей, завещатель предназначает 1 430 220 р. автору „Истории“, а 479 740 — Академии, — всего, следовательно, распоряжается суммой почти в два миллиона: 1 909 960 р. Уж не платил ли

банк в те времена по вкладам огромные проценты? Это можно вычислить. Обозначим неизвестное число процентов через x. Ежегодно капитал увеличивается в

$$\left(1+\frac{x}{100}\right) \text{ раз},$$

а в течение 93 лет в

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^{93} \text{ раз}.$$

Имеем уравнение

$$50\,000\left(1+\frac{x}{100}\right)^{93}=1909960.$$

Логарифмируем

$$\lg 50000+93 \lg \left(1+\frac{x}{100}\right)=\lg 1909960$$

$$4{,}6989700+93 \lg \left(1+\frac{x}{100}\right)=6{,}2810106.$$ [1]

Отсюда

$$\lg \left(1+\frac{x}{100}\right)=\frac{1{,}5820406}{93}=0{,}0170112$$

$$1+\frac{x}{100}=1{,}04; \quad x=4.$$

Капитал был отдан из 4% годовых, — процент весьма скромный.

ЗОЛОТОЙ ДОЖДЬ ИЗ МЕДНОГО ПЯТАКА

Поразительный пример быстрого нарастания денег по сложным процентам приведен известным астрономом Фламмарионом. Пример, правда, фантастический, но тем не менее поучительный. Речь идет о пяти копейках, по-

---

[1] Пользуемся 7-значными таблицами, так как в уравнение входит 7-значное число.

ложенных в банк в первом году нашего летоисчисления. Какая сумма составится из этого пятака к нашему времени?

„Сколько бы ни разсказывал вам самый красноречивый оратор, что такого количества золота невозможно перевезти в вагонах всех железных дорог целого света, сколько бы ни говорил он вам, что Альпы и Пиренеи, будь они насквозь алмазные, не представили бы такой ценности, — написанный вычислителем ряд из 39 цифр

342 653 248 700 000 000 000 000 000 000 000 000 000 р.

положительно ошеломит вас.[1] Число это начнет выясняться для вас, когда вы вспомните, что земной шар весит „всего" $57 \cdot 10^{20}$ тонн, а будь он целиком из золота, т. е. в 3,5 раза тяжелее, вес его был бы $2 \cdot 10^{22}$ тонн и стоимость $25 \cdot 10^{28}$ рублей. Потребовалось бы 1400 миллионов золотых шаров, величиной с Землю, чтобы уплатить баснословный капитал, выросший из пятака".

Если бы с неба ежеминутно падал золотой шар размером с нашу планету, то, чтобы накопилась такая сумма, этот фантастический дождь золотых планет должен был бы длиться 2800 лет. Значит, если бы кто-нибудь занял 5 коп. из 5 сложных процентов на две тысячи лет и стал бы немедленно уплачивать будущий долг, внося е ж е м и н у т н о по золотому слитку, величиной с Землю, — он и сейчас бы еще далеко не уплатил следуемой суммы.

Проверку этих вычислений предоставляю читателю выполнить самостоятельно.

---

[1] Расчет сделан Фламмарионом более 50 лет назад. Для настоящего момента сумму надо увеличить раз в 15, так как капитал, растущий из 5 сложных процентов, удваивается каждые 14 лет.

НЕПРЕРЫВНЫЙ РОСТ КАПИТАЛА

В сберкассах процентные деньги присоединяются к основному капиталу ежегодно. Если присоединение совершается чаще, то капитал растет быстрее, так как в образовании процентов участвует бо́льшая сумма. Возьмем чисто теоретический, весьма упрощенный пример. Пусть в сберкассу положено 100 руб. из 100% годовых. Если процентные деньги будут присоединены к основному капиталу лишь по истечении года, то к этому сроку 100 руб. превратятся в 200 руб. Посмотрим теперь, во что превратятся сто рублей, если процентные деньги присоединять к основному капиталу каждые полгода. По истечении полугодия 100 руб. вырастут в

$$100 \times 1{,}5 = 150 \text{ руб.}$$

А еще через полгода в

$$150 \times 1{,}5 = 225 \text{ руб.}$$

Если присоединение делать каждые $^1/_3$ года, то по истечении года 100 руб. превратятся в

$$100 \times (1^1/_3)^3 = 237 \text{ руб.}$$

Будем учащать сроки присоединения процентных денег до 0,1 года, до 0,01 года и т. д. Тогда из 100 руб. спустя год получится:

$$100 \times 1{,}1^{10} = 259 \text{ руб.}$$

$$100 \times 1{,}01^{100} = 270 \text{ руб. } 50 \text{ коп.}$$

В подробных курсах алгебры доказывается, что при безграничном сокращении сроков присоединения наращенный капитал не растет беспредельно, а приближается к некоторому пределу, равному

271 р. 83 к.

Больше чем в 2,7183 раза капитал, положенный из 100%, увеличиться не может, даже если бы наросшие проценты присоединялись к капиталу каждую секунду.

ЧИСЛО *e*

Сейчас полученное число 2,7183 . . . . , играющее в высшей математике огромную роль, — не меньшую, пожалуй, чем знаменитое число π, — имеет особое обозначение: *e*. Это число иррациональное: оно не может быть точно выражено конечным числом цифр,[1] но вычисляется только приближенно, с любою степенью точности, помощью следующего ряда:

$$1+1+{}^1/_2+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ .\ .\ .\ .$$

Из приведенного выше примера с ростом капитала по сложным процентам легко видеть, что число *e* есть предел выражения

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

при беспредельном возрастании n.

По многим причинам, которых мы здесь изложить не можем, число *e* очень целесообразно принять за основание системы логарифмов. Такие таблицы („натуральных логарифмов") существуют и находят себе широкое применение в науке и технике. Те логарифмы-исполины из 48, из 61, из 102 и из 260 цифр, о которых мы говорили на стр. 207, имеют основанием именно число *e*.

Число *e* появляется нередко там, где его вовсе не ожидали. Поставим себе, например, такую задачу.

---

[1] Кроме того, оно, как и число π, „трансцендентно", т. е. не может получиться в результате решения какого бы то ни было алгебраического уравнения.

На какие части надо разбить данное число a, чтобы произведение всех частей было наибольшее?

Мы уже знаем, что наибольшее произведение при постоянной сумме дают числа тогда, когда они равны между собой. Ясно, что число a надо разбить на равные части. Но на сколько именно равных частей? На две, на три, на десять? Приемами высшей математики можно установить, что наибольшее произведение получается, когда части возможно ближе к числу e.

Например, 10 надо разбить на такое число равных частей, чтобы части были возможно ближе к 2,718. Для этого надо найти частное

$$\frac{10}{2{,}718} = 3{,}679\,.$$

Так как разделить на 3,679 равных части нельзя, то приходится выбрать делителем ближайшее целое число — 4. Мы получим, следовательно, наибольшее произведение частей 10-ти, если эти части равны $^{10}/_{4}$, т. е. 2,5. Значит,

$$(2{,}5)^4 = 39{,}0625$$

есть самое большое число, какое может получиться от перемножения частей числа 10-ти. Действительно, разделив 10 на 3 или на 5 равных частей, мы получим меньшие произведения:

$$\left(\frac{10}{3}\right)^3 = 37\,; \qquad \left(\frac{10}{5}\right)^5 = 32\,.$$

Число 20 надо для получения наибольшего произведения его частей разбить на 7 частей, потому что

$$20 : 2{,}718 = 7{,}37 \approx 7\,.$$

Число 50 надо разбить на 18 частей, а 100 — на 37, потому что

$$50 : 2{,}718 = 18{,}4\,; \qquad 100 : 2{,}718 = 36{,}8\,.$$

ДВЕ СТЕПЕНИ

Что больше: миллион в миллион первой степени или миллион один в миллионной степени:

$$1000000^{1000001} \text{ или } 1000001^{1000000}?$$

Как установить это без помощи логарифмических таблиц?

Решение

Прежде всего заметим, что

$$1000000^{1000001} = 1000000 \times 1000000^{1000000}.$$

Найдем теперь отношение второго выражения к первому:

$$\frac{1000001^{1000000}}{1000000 \times 1000000^{1000000}} = \frac{1{,}000001^{1000000}}{1000000}.$$

Числитель последней дроби меньше предела выражения

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n=\infty},$$

которое, мы знаем, равно $e = 2{,}718\ldots$ Ясно, что рассматриваемое отношение значительно (примерно в 300 000 раз) меньше единицы; поэтому второе выражение меньше первого, т. е.

$$1000000^{1000001} > 1000001^{1000000}, —$$

(примерно в 300 000 раз).

Всегда ли однако $a^{a+1} > (a+1)^a$?

Исследуем. Возьмем отношение

$$\frac{(a+1)^a}{a^{a+1}} = \frac{(a+1)^a}{a \cdot a^a} = \frac{\left(a + \frac{1}{a}\right)^a}{a}.$$

Числитель последней дроби не превышает 2 с небольшим. Следовательно, если целое число $a > 2$, то существует соотношение:

$$a^{a+1} > (a+1)^a.$$

Если же $a \leqslant 2$, то

$$a^{a+1} < (a+1)^a.$$

Значит

$$3^4 > 4^3; \quad 5^6 > 6^5; \quad 10^{11} > 11^{10}$$

и только в одном случае существует для целых чисел обратное соотношение:

$$2^3 < 3^2.$$

ДВА КОРНЯ

К сейчас рассмотренной задаче естественно примыкает следующая.

Без логарифмических таблиц установить, что больше:

$$\sqrt[10]{10} \text{ или } \sqrt[11]{11}.$$

Решение

Определим, чему равно отношение правого корня к левому:

$$\frac{\sqrt[11]{11}}{\sqrt[10]{10}} = \frac{\sqrt[110]{11^{10}}}{\sqrt[110]{10^{11}}} = \sqrt[110]{\frac{11^{10}}{10^{11}}}.$$

Но мы уже знаем, что $11^{10} < 10^{11}$; под корнем число меньше 1, и следовательно корень из этого числа любой степени должен быть меньше единицы (докажите это самостоятельно).

Итак

$$\frac{\sqrt[11]{11}}{\sqrt[10]{10}} < 1, \quad \text{и} \quad \sqrt[10]{10} > \sqrt[11]{11}.$$

Обобщая эту задачу, мы наталкиваемся на то же ограничение, с каким встретились и в предыдущей задаче:

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}.$$

Действительно, первый корень равен 1,414, а второй 1,492.

СКОЛЬКО ЛЮДЕЙ ЖИЛО НА СВЕТЕ?

Стремительное нарастание чисел, увеличивающихся в геометрической прогрессии, дает иногда повод к ошибочным заключениям. Поучительный пример подобного заблуждения оставил нам поэт Бенедиктов, посвящавший свой досуг занятиям математикой, вернее—математическим развлечениям. Сохранилась составленная им рукописная „увеселительная арифметика", с которой я имел возможность познакомиться. Последняя глава её носит название „Громадное число живших на земном шаре его обитателей" и заключает очень любопытный подсчет.

„Предположим, что первоначально от одной пары людей произошло две пары, что от каждой из этих пар произошло по две пары, и потом каждая пара производит две пары. По этому предположению размножение на земле людей шло в геометрический прогрессии: 1, 2, 4, 8, 16, 32..... Возьмем столько членов этой прогрессии, сколько могло пройти человеческих поколений в течение 7376 лет. [Бенедиктов наивно опирался на библейские данные о древности человечества.] Положим на каждое поколение 50 лет". Насчитывая всех поколений, начиная от первой пары человеческих существ, 140 и беря 140 членов прогрессии, автор приходит к выводу, что число всех живших на Земле людей достигает 4 септальонов.

„Половину из этого числа отбросим, принимая в соображение, что многие из родившихся умирают в младенчестве... Значит, останемся только при двух септальонах". Септальоном Бенедиктов называет единицу с 42 нулями, т. е. 10^{42}.

Далее, вес этого количества людей—„160 септальонов фунтов"—он сопоставляет с „весом" земного шара, который принимает в 3,5 квадрильона фунтов (вместо 14 квадрильонов). Результат получается поистине разительный: общий вес всех прежде живших людей превышает вес земного шара в 1600 биллионов раз (приводим исправленную цифру). „Это показывает, — заключает автор, — что один и тот же вещественный материал, из которого формировались телесные составы живших на свете людей, был в обороте по крайнем мере 1600 биллионов раз, и за каждую вещественную частицу, перебывавшую в различных живых человеческих телах, могли бы спорить 1600 биллионов индивидуумов".

Результат станет еще поразительнее, если принять во внимание соображение, что человечество произошло не от одной пары предков, а от многих, и что существует оно никак не 7000 лет, а несколько сот тысячелетий. Далее, надо иметь в виду, что „в формировании телесных составов" людей участвовала не вся масса земного шара, а только масса поверхностного слоя нашей планеты, составляющего незначительную часть всего объема Земли. Наконец, в споре за „каждую вещественную частицу, перебывавшую в живых телах", должно было предъявить свои права и бесчисленное множество животных, населявших нашу планету, начиная с древнейших геологических эпох.

Явная несоообразность, к которой мы пришли, показывает, что в ходе этого рассуждения кроется какая-то существенная ошибка. В чем же ошибка?

Она заключается в том, что норма увеличения численности человечества, — два удвоения в столетие, — приблизительно верная для нашего времени, была незаконно распространена на все предшествовавшие времена вплоть до самой отдаленной эпохи. Между тем, несомненно, что в древности смертность была гораздо выше и, следовательно, человечество размножалось значительно медленнее, чем в близкую нам эпоху. Даже в исторические времена бывали периоды, когда население целых стран не увеличивалось, а, напротив, уменьшалось; достаточно вспомнить эпоху 30-летней войны в Германии или чуму в Англии в XIV веке, когда число обитателей страны уменьшилось более чем на 30%. Легко представить себе, какие опустошения производили войны, эпидемии и стихийные бедствия в ранний период существования человечества. Без сомнения, бывали периоды, — длившиеся, быть может, долгий ряд тысячелетий, — когда человечество временно вымирало, т. е. численность его шла на убыль. Допустимо ли при таких условиях говорить о непрерывном размножении человечества по правилу геометрической прогрессии?

Мы можем, конечно, с весьма грубым приближением принять, что в среднем человечество размножалось все же по правилу возрастающей прогрессии, а именно считать, что по истечении, например, каждого тысячелетия численность его увеличилась в некоторое одинаковое число раз. Но тогда задачу, поставленную Бенедиктовым, надо решать совсем с другого конца. В прогрессии размножения человечества мы должны считать известным: последний член, т. е. нынешнюю численность населения земного шара, 2 000 000 000; число членов, т. е. число протекших тысячелетий — предположительно, конечно; остановимся, например, на 300 тысячелетиях; первый член, т. е. число первоначальных предков —

еще более гадательно; примем, например, 100 предков. Знаменатель же этой прогрессии, который Бенедиктов считал исходным данным, нам придется вычислить, чтобы определить сумму ее членов. Пусть знаменатель прогрессии x, т. е. пусть численность человечества вырастает каждое тысячелетие в x раз. К концу 300-го тысячелетия 100 предков должны были превратиться в

$$100\,x^{800}.$$

Так как число это должно равняться 2 000 000 000, или 2.10^9, то имеем уравнение

$$100\,x^{800} = 2.10^9.$$

Логарифмируя, получаем

$$\lg 100 + 300 \lg x = \lg 2 + 9$$

$$\lg x = \frac{7{,}30103}{300} = 0{,}02433$$

$$x = 1{,}06$$

Результат поучительный: численность человечества возрастала (в среднем) каждое тысячелетие на 6%, между тем как, по Бенедиктову, она удваивалась каждые 50 лет, т. е. за тысячелетие увеличилась в $2^{20} = 1048576$ — более чем в миллион раз!

Разница огромная, а отсюда и несообразный результат подсчета Бенедиктова.

Теперь попытаемся составить себе представление о том, каково в действительности могло быть число людей, живших на земном шаре за все время существования человечества. Будем считать, что в среднем наличное число людей успевает умереть и смениться новым в течение 50 лет. Если бы мы могли подсчитывать население земного шара каждые 50 лет, делая это в течение 300 000 лет, у нас получился бы ряд чисел, сумма

которых составляла бы общую численность всех проживавших на Земле людей. Первые его 20 членов будут

100; 100; 100 и т. д.

Следующие 20 членов

106; 106; 106 и т. д.

Дальше пойдут 20 членов, каждый из которых равен

$$100\,(1{,}06)^2.$$

Затем 20 членов по $100\,(1{,}06)^3$ каждый и т. д. Последними 20 членами будет нынешняя численность человечества — $2 \cdot 10^9$.

Нетрудно определить сумму членов такого ряда: она составляет

$$20 \cdot \frac{2 \cdot 10^9 \cdot 1{,}06 - 100}{1{,}06 - 1} \approx 20 \cdot 2 \cdot 10^9 \cdot 17 = 68 \cdot 10^{10}$$

Вот сколько — по весьма, конечно, приблизительной оценке — жило на свете людей за время существования нашей планеты. Число это всего в 340 раз превышает современное население земного шара и ничтожно мало по сравнению с абсурдно-огромным числом Бенедиктова.

Ошибку Бенедиктова делают и те богословы, которые пытались математическими расчетами подтвердить справедливость свидетельств Библии. Вот образчик такого рассуждения из статьи французского математика аббата Муанье „Древность человеческого рода" (1763 г.).

„Примем для годового возрастания народонаселения число $\frac{1}{227}$ [следовало сказать: $1\frac{1}{227}$. — *Я. П.*], мало отличающееся от того, которое представляет действительное возрастание населения во Франции, и вспомним, что в 1600 году от сотворения мира Ной вышел из ковчега с тремя сыновьями и тремя их женами, — тогда

после 4207 лет [библейский счет !] число жителей на Земле должно равняться

$$7\left(1+\frac{1}{227}\right)^{4207}=1\,300\,000\,000$$

т. е. истинному числу обитателей земного шара (в 1863 г.)".

Муанье видит в таком полном согласии подтверждение правильности свидетельств библии. Излишне добавлять, после сказанного ранее, что весь этот благочестивый расчет основан на грубом заблуждении.

ТРЕХЗНАЧНЫЕ ЛОГАРИФМЫ

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	000	004	009	013	017	021	025	029	033	037
1,1	041	045	049	053	057	061	065	068	072	075
1,2	079	083	086	090	093	097	100	104	107	111
1,3	114	117	121	124	127	130	134	137	140	143
1,4	146	149	152	155	158	161	164	167	170	173
1,5	176	179	182	185	188	190	193	196	199	201
1,6	204	207	210	212	215	218	220	223	225	228
1,7	230	233	236	238	241	243	246	248	250	253
1,8	255	258	260	263	265	267	270	272	274	277
1,9	279	281	283	286	288	290	292	295	297	299
2	301	322	342							
2				362	380	398				
2							415	431	447	462
3	477	491	505							
3				519	532	544	556	568	580	591
4	602	613	623							
4				634	644	653				
4							663	672	681	690
5	699	708	716	724	732	740	748	756	763	771
6	778	785	792	799	806	813	820	826	833	839
7	845	851	857	863	869	875	881	887	892	898
8	903	909	914	919	924	929	935	940	945	949
9	954	959	964	969	973	978	982	987	991	996
		1	2	3	4	5	6	7	8	9

$lg\,\pi = 0{,}497$
$lg\,2\pi = 0{,}798$
$lg\,\sqrt{2} = 0{,}150$
$lg\,\sqrt{3} = 0{,}239$

ПОПРАВКИ

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
2	4	5	7	9	11	13	14	16
2	3	5	6	8	10	11	13	14
1	3	4	6	7	8	10	11	13
1	2	4	5	6	7	8	10	11
1	2	3	4	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	4	5	6	7	8
1	2	2	3	4	5	6	6	7
1	1	2	3	4	4	5	6	6
1	1	2	2	3	4	4	5	5
0	1	2	2	2	3	4	4	4
0	1	2	2	2	3	4	4	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9

УПОТРЕБЛЕНИЕ ТАБЛИЦЫ

Нахождение логарифма

1) Найти lg 138.

На пересечении строки „1,3" и графы „8" находим мантиссу 140. Характеристику (2) определяем по соображению. Имеем: lg 138 = 2,140.

2) Найти lg 5,27.

На пересечении строки „5" и графы „2" находим мантиссу 716 для числа 52. Поправку для третьей цифры отыскиваем в **той же строке** в графе поправок под цифрою 7. Здесь же находим 6. Следовательно, мантисса для 527 равна 716 + 6 = 722, и lg 5,27 = 0,722.

3) Найти lg 0,608.

На пересечении строки „6" и графы „0" находим мантиссу 778. Поправку для третьей цифры отыскиваем в той же строке, в графе поправок под цифрою 8. Здесь находим 6. Следовательно, мантисса для 608 равна 778 + 6 = 784, и lg 0,608 = $\bar{1}$,784.

Нахождение числа

4) Найти число, логарифм которого 1,193.

Отыскав мантиссу 193, мы видим, что она отвечает числу 156. Следовательно, 1,193 = lg 15,6.

5) Найти число, логарифм которого $\bar{1}$,927.

В таблице нет мантиссы 927. Ближайшая меньшая мантисса, 924, отвечает числу 84. Поправку числа для недостающих 3 единиц мантиссы отыскиваем в графе поправок **над** цифрой 3 той же строки, где взята была мантисса: над тройками стоят вверху графы цифры 5 и 6. Следовательно, мантисса 927 отвечает числу 845 или 846, а искомое число равно 0,845 или 0,846: оба числа имеют логарифм $\bar{1}$,927.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ответств. редактор *Н. А. Энгель*. Технич. редактор *Е. И. Вольфсон*.
Сдано в набор 19-22/VII 32 г. Подп. к печ. 29/X—4/XI 32 г. Ст. формат $82^1/_2 \times 110$ см. Издание № 16. Типогр. знаков 1 бум. листе 117.504.
Ленгорлит № 60694. Тираж 15.000 экз. 15 печ. листов. Зак. № 2060.
Типография „Печатня". Прачечный пер., д. № 6. Тел. № 1-25-06.